This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

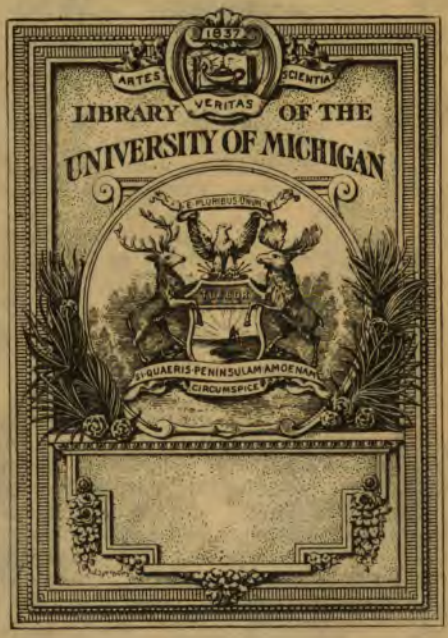
Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Mathematische Bibliothek

Gemeinverständliche Darstellungen aus der Elementar-Mathematik für Schule und Leben. Unter Mitwirkung von Fachgenossen herausgegeben von



Die … gloser Folge
her… n der Mathe-
mat… ehmer Form
zu e… iebotene hin-
aus … en also teils
eine … elementarer
Prol… besonderes
mat… handeln, die
den … hematischen
Ken… k einführen.

1. … urvölkern in
2. … gischen und
3. … em Ausblick
4. … wendungen.
5. … 1912.
6. … metrie. Mit
7. … ahlen. 1912.
8. … ruren. 1912.
9. A. Witting, Einführ. in die Differenzialrechnung. Mit 40 Fig. 1912.
10. W. Lietzmann u. V. Trier, wo steckt der Fehler? Mit 24 Fig. 1913.
11. P. Zühlke, Konstruktionen in begrenzter Ebene. Mit Figuren. 1913.

Weiter sind zunächst in Aussicht genommen:

E. Beutel, die Quadratur des Kreises.
M. Gebhardt, zur Geschichte der quadratischen Gleichungen.
W. Lietzmann, der Eulersche Polyedersatz.
H. Rothe, die zeichnerische Behandlung der Geländeflächen.
A. Schreiber, Or… Lande, zur See u…
H. Wieleitner, Ele… — höhere Kurven I.
M. Winkelmann, der Kreisel.
A. Witting, Funktionsbegriff u. graphische Darstellung.
— abgekürztes Rechnen.
— Verschiebung, Drehung, Spiegelung, Verschraubung.
…hmoment und Trägheitsmoment.
…. Gebhardt, Beispiele zur Ge… der Mathematik.
…ke, stereometrische Konstruk-

Mathematics
QA
467
.B569

MATHEMATISCHE BIBLIOTHEK
HERAUSGEGEBEN VON W. LIETZMANN UND A. WITTING
12

DIE QUADRATUR DES KREISES

VON

EUGEN BEUTEL
OBERREALLEHRER AN DER LATEIN- UND REALSCHULE
IN VAIHINGEN-ENZ

MIT 15 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

COPYRIGHT 1913 BY B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

02 h 15-5.

VORWORT

Bei der Abfassung des vorliegenden Bändchens habe ich mich von dem Gedanken leiten lassen, bei dem Leser Sinn und Verständnis für die großen Probleme zu wecken, an denen die Mathematik reich ist und zu deren Lösung die Geistesarbeit von Jahrhunderten, ja, wie die Geschichte der Quadratur des Kreises zeigt, von Jahrtausenden notwendig war. Auf Vollständigkeit kann allerdings kein Anspruch erhoben werden; mit Rücksicht auf den mir zur Verfügung stehenden Raum mußte manches unterdrückt werden, was ich gerne aufgenommen hätte, — so wäre ich namentlich gerne auf die Arbeiten von Huygens näher eingegangen — doch habe ich mich bemüht, alle diejenigen mathematischen Leistungen anzuführen, — wenn auch öfters nur historisch — die für die Lösung des Problems in irgendeinem Sinne einen Fortschritt bedeuten. Auch hoffe ich manchem der Leser damit einen Dienst erweisen zu können, daß ich von den zahlreichen, zum Teil hochbedeutenden Vertretern der mathematischen Wissenschaft, welche sich mit der Kreisquadratur beschäftigt haben, einige kurze Angaben über ihre Lebensumstände dem Namenverzeichnis beigefügt habe.

Mögen sich durch die Lektüre dieser Schrift zahlreiche Leser bewogen fühlen, sich eingehender mit dem Studium der Geschichte der Mathematik zu befassen, die ja auch neuerdings an den höheren Schulen mehr und mehr die ihr gebührende Beachtung findet.

Vaihingen-Enz, im März 1913. **E. Beutel.**

275249

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

Erstes Kapitel: Einleitung

§ 1. Die Ursachen der Berühmtheit des Problems 1
§ 2. Genaue Formulierung des Problems; Überblick über die verschiedenen Zeiträume der Geschichte der Kreisquadratur 4

Zweites Kapitel: Der elementargeometrische Zeitraum

§ 3. Die Ägypter, Chinesen, ältesten Inder und Babylonier 6
§ 4. Die Griechen 9
§ 5. Die Römer und Inder des Mittelalters 20
§ 6. Die Araber 22
§ 7. Die Völker des Abendlandes bis 1400 23
§ 8. Von Cusanus bis Huygens 25

Drittes Kapitel: Der arithmetisch-trigonometrische Zeitraum

§ 9. Der Einfluß der Differential- und Integralrechnung . . 37
§ 10. Berechnung von π durch unendliche Reihen 42
§ 11. Unendliche Produkte für π 51
§ 12. Die Japaner und Chinesen 52
§ 13. Der Buchstabe π 53
§ 14. Näherungskonstruktionen 54

Viertes Kapitel: Der algebraische Zeitraum

§ 15. Beweis der Irrationalität von π 61

Fünftes Kapitel: Die endgültige Erledigung des Problems

§ 16. Beweis der Transzendenz von π 65

Literaturverzeichnis 69

Namenverzeichnis 71

ERSTES KAPITEL

EINLEITUNG

§ 1. Die Ursachen der Berühmtheit des Problems

Die Mathematik ist reich an berühmten Problemen; keines aber hat eine solche geradezu sprichwörtlich gewordene Berühmtheit erreicht wie die *Quadratur des Kreises*, keines hat eine solch große Zahl von Bearbeitern und, wie wir gleich hinzufügen müssen, von mißglückten Lösungsversuchen gefunden wie das unsrige.

Es sind verschiedene *Ursachen*, denen die Kreisquadratur ihre Berühmtheit verdankt. Nicht als ob der Wert dieses Problems für die Wissenschaft oder für ihre Anwendungen von hervorragender Bedeutung wäre; es gibt in der Mathematik viele Probleme, die wissenschaftlich weit interessanter und praktisch ungemein wertvoller sind, die trotzdem nicht weit über den Kreis der Fachgenossen hinaus bekannt geworden sind. Dagegen hat das Problem von der Quadratur des Kreises bis in die letzten Jahrzehnte herein immer wieder Bearbeiter gefunden. Da diese häufig fachwissenschaftlich wenig durchgebildet waren, so konnte ihnen die Lösung der Aufgabe natürlich nicht gelingen aus dem einfachen Grunde, weil, wie wir später sehen werden, eine Lösung in dem Sinne, wie Laien es meinen, unmöglich ist.

Die *Anziehungskraft* des Problems liegt einesteils darin, daß die Begriffe Kreis und Quadrat fast jedermann geläufig sind; jeder glaubt zu wissen, was unter dem Flächeninhalt einer begrenzten Figur zu verstehen ist, und so scheint die Aufgabe: „einen Kreis in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln“ beim ersten Anblick nicht allzu schwer. Ferner hat die Tatsache, daß die Lösung dieser Aufgabe von den hervorragendsten Mathematikern aller Zeiten vergeblich versucht worden ist, offenbar eine nicht geringe Anziehungs-

kraft auf die Mathematiker ausgeübt und auch der große Kreis der Nichtmathematiker scheint hiervon angesteckt worden zu sein. Hiezu kam noch ein weiteres. Nicht nur winkte dem Glücklichen, der die Lösung fand, der Lorbeer einer fast unsterblichen Berühmtheit, sondern im Mittelalter fand die Ansicht viele Anhänger, daß derjenige, dem die Lösung dieses mathematischen Rätsels glücke, den Zusammenhang der Vorgänge der irdischen Erscheinungswelt besser verstehe und vielleicht sogar Einblick in übernatürliche Geschehnisse erlange. Man betrachtete das Problem der Quadratur des Kreises als den mathematischen Stein der Weisen.

Endlich war bis in die neueste Zeit herein der Glaube verbreitet, daß große Akademien, das englische Parlament (wegen des vermeintlichen Zusammenhangs mit der Auffindung der geographischen Länge auf hoher See) oder irgendeine einflußreiche Persönlichkeit hohe Geldpreise für die Lösung der Aufgabe ausgesetzt hätten; denn es hätte ja sonst nach der Ansicht vieler mathematischer Laien keinen Zweck gehabt, daß selbst hervorragende Gelehrte sich mit der Lösung des Problems abgemüht hätten. Die Erlangung einer großen Geldprämie mag neben einem gewissen Maß von Ehrgeiz häufig die Haupttriebfeder der Bemühungen vieler „Quadratoren" gewesen sein.

Es ist äußerst unterhaltend und belustigend, die Stoßseufzer solcher Quadratoren zu lesen, die trotz ihrer Überzeugung von der absoluten Genauigkeit ihrer Konstruktion die von ihnen erwartete allgemeine Anerkennung nicht fanden. So z. B. verfluchte der Franzose *Basselin* (18. Jahrh.) die undankbare Mitwelt in der Hoffnung, von der Nachwelt anerkannt zu werden. Mehrfach setzten die Quadratoren Preise aus für denjenigen, der einen Fehler in ihrer Lösung finde: so mußte der Franzose *Mathulon* für eine mißglückte Kreisquadratur den von ihm für den Nachweis seines Fehlers festgesetzten Preis von 1000 Talern wirklich ausbezahlen und der polnische Oberstleutnant *Corsonich* setzte 50 Dukaten für denselben Zweck aus. In einer im Jahr 1840 erschienenen Schrift werden die Leistungen von Archimedes als Betrug gekennzeichnet und nachdem der Verfasser dem lieben Gott gedankt hat, daß er gerade ihn auserwählt habe, „die langgesuchte, mit Inbrunst begehrte, von Millionen be-

tastete Lösung des mathematischen Phänomen-Problems" zu lösen, sagt er: „Es beliebte nun einmal so der Mutter Natur, dies mathematische Kleinod dem menschlichen Forschen vorzuenthalten, bis es ihr gefiel, die Wahrheit der Einfalt zu übergeben." Und erst 1893 erblickte eine „genaue" Kreisquadratur das Licht der Öffentlichkeit unter dem stolzen Titel: „Die Wahrheit schreitet einfach aber majestätisch vor und zermalmt ihre Gegner"; trotzdem war die Lösung falsch.

So kann es nicht wundernehmen, daß schon im Jahre 1775 die Pariser Akademie der Wissenschaften sich veranlaßt sah, ihre Mitglieder von der nutzlosen Aufwendung von Zeit und Mühe für die Durchsicht der unaufhörlich einlaufenden Erzeugnisse der Kreisquadrierer zu befreien. Sie veröffentlichte folgende Erklärung: „L'Académie a pris, cette année, la résolution de ne plus examiner aucune solution des Problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle ou de la quadrature du cercle . . ." Der damalige ständige Sekretär der Akademie, *Condorcet,* begründete klar und bestimmt diesen Entschluß, indem er sich einerseits auf mathematische Autoritäten berief, welche die Unmöglichkeit einer genauen Kreisquadratur anerkannten, obwohl sie dies noch nicht streng beweisen konnten; anderseits zeige die langjährige Erfahrung der Akademie die Nutzlosigkeit derartiger von mathematischen Laien unternommener Versuche für die Wissenschaft. Andere Akademien veröffentlichten bald ähnliche Beschlüsse, aber trotzdem ist die Zahl der Quadratoren bis in die Neuzeit herein nicht ausgestorben; neben dem Gefühl verkannter Größe erhält sich bei ihnen das Bewußtsein, daß die Mathematikerzunft ihnen nur aus Neid die gebührende Anerkennung versage.

Doch ist es heutzutage unleugbare Tatsache, daß vielleicht infolge der stärkeren Betonung der Mathematik im Schulunterricht jeder gebildete Nichtmathematiker das Problem wenigstens dem Namen nach kennt und weiß, daß es unlösbar ist oder daß bis jetzt auch den berühmtesten Mathematikern eine Lösung nicht geglückt ist. So findet sich häufig in nichtmathematischen Schriften, ja sogar in unseren Zeitungen heute noch die Redensart: „die Quadratur des Zirkels versuchen" in dem Sinne „etwas Unmögliches tun"

oder „etwas außerordentlich Schwieriges mit unzulänglichen Mitteln erledigen wollen". Auch Bismarck hat, um nur ein Beispiel anzuführen, in seinen Reichstagsreden hie und da von der Quadratur des Kreises in diesem bildlichen Sinn gesprochen.

§ 2. Genaue Formulierung des Problems; Überblick über die verschiedenen Zeiträume der Geschichte der Kreisquadratur

Unter der *Zahl* π verstehen wir *das Verhältnis des Kreisumfangs u zum Durchmesser d*, also ist $u = \pi d$. Da alle Kreise ähnliche Figuren sind, so ist $u_1 : u_2 = d_1 : d_2$ und $J_1 : J_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2}$. Hieraus folgt $J = \lambda r^2$, wo λ eine noch zu ermittelnde Konstante ist. Da aber $J = \frac{1}{2} ru$ (wo r der Kreisradius ist), so ist wegen $u = \pi d$ die Konstante $\lambda = \pi$. Die *Zahl* π gibt also auch *das Verhältnis des Kreisinhalts zum Quadrat über dem Radius* an. Der Wert der Zahl π ist

$$3{,}1415926535897 \ldots .$$

Aus der Formel $J = \frac{1}{2} ru$ ergibt sich, daß man jeden Kreis in ein inhaltgleiches Dreieck verwandeln kann, dessen Grundlinie gleich dem Kreisumfang u und dessen Höhe gleich dem Kreisradius r ist. Dieses Dreieck läßt sich in ein flächengleiches Quadrat verwandeln, und damit wäre die Aufgabe gelöst. *Das Problem der Quadratur des Kreises kommt also* auf die Konstruktion des Umfangs des Kreises, d. h. *auf eine Rektifikation hinaus.* Im Sinn der Geometer des Altertums betrachten wir nur solche Aufgaben als konstruierbar, die sich allein *durch eine endliche Zahl von Operationen unter Anwendung von Zirkel und Lineal* lösen lassen. Die Lösung elementar-geometrischer Konstruktionsaufgaben läuft schließlich auf die wiederholte Ausführung der beiden folgenden Aufgaben hinaus, die sich nicht auf einfachere zurückführen lassen:

a) durch zwei Punkte eine Gerade zu ziehen;

b) um einen gegebenen Punkt mit gegebenem Radius einen Kreis zu konstruieren.

Die Aufgabe a) wird durch alleinige Anwendung eines Lineals, die Aufgabe b) durch Anwendung eines Zirkels gelöst.

Zu dieser geometrischen Festsetzung muß noch eine arithmetische treten.

Alle Zahlen werden eingeteilt in *rationale Zahlen* und in *irrationale Zahlen.*[1]) Die rationalen Zahlen umfassen das Gebiet der positiven und negativen ganzen Zahlen und die Brüche. Bei den irrationalen Zahlen unterscheidet man *algebraische* und *transzendente* Zahlen. Erstere sind die Wurzeln einer Gleichung beliebig hohen Grades mit rationalen Koeffizienten. Rationale Zahlen erhalten wir durch die Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Unter Zugrundelegung einer Einheitsstrecke sind diese vier Operationen mit Zirkel und Lineal ausführbar. Die einfachste irrationale Operation ist das Ausziehen von Quadratwurzeln. Jeder Ausdruck von der Form $a + b\sqrt{c}$ ist geometrisch konstruierbar. Bei den höheren irrationalen Operationen ist eine Konstruktion nur dann möglich, wenn man mit einer endlichen Anzahl von Quadratwurzeln auskommt.[2]) Auf die endliche Anzahl ist hierbei Wert zu legen; *eine unendliche Anzahl von rationalen Operationen oder von Quadratwurzelausziehungen gibt* eine im allgemeinen[3]) in unserem Sinne nicht mehr geometrisch konstruierbare Größe. Wir können also sagen:

Ein analytischer Ausdruck, d. h. jede Buchstaben- oder Zahlenverbindung, *ist dann und nur dann mit Zirkel und*

---

1) Vgl. Bd. 2 der „Math. Bibl.": *Wieleitner,* Der Begriff der Zahl, § 4.

2) Ist a eine gegebene Strecke, so ist der Ausdruck $x = a\sqrt[3]{2}$ nicht unter Anwendung von Zirkel und Lineal konstruierbar. Aus $x = a\sqrt[3]{2}$ folgt $x^3 = 2a^3$. Diese Gleichung entspricht dem ebenfalls berühmten Problem der Würfelverdoppelung.

3) So z. B. gibt die unendliche Reihe $1 + x + x^2 + \cdots$ in inf. für eine rationale Zahl x zwischen -1 und $+1$ die rationale Zahl $\frac{1}{1-x}$; ebenso stellt jeder (unendliche) periodische Dezimalbruch eine rationale Zahl dar.

Lineal konstruierbar, wenn er aus den gegebenen Größen durch eine endliche Anzahl rationaler Operationen und Quadratwurzeln abzuleiten ist.

Wenden wir uns nach diesen allgemeinen Bemerkungen nun zu unserem eigentlichen Gegenstand. In der Geschichte der Kreisquadratur lassen sich vier Zeiträume unterscheiden:

I. Der elementar-geometrische Zeitraum von den Anfängen mathematischer Untersuchungen bis zur Erfindung der Differential- und Integralrechnung, gekennzeichnet durch die Arbeiten von Archimedes und Huygens: Jener hat die Methode der ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Vielecke wissenschaftlich begründet, dieser hat ihr die höchste Vollendung zuteil werden lassen, die mit elementaren Hilfsmitteln möglich war. Die Zahl π wird numerisch mit jeder nur wünschenswerten Genauigkeit berechnet; die näherungsweise Quadratur des Zirkels kann mit jeder denkbaren Genauigkeit konstruktiv ausgeführt werden.

II. Der arithmetisch-trigonometrische Zeitraum von 1654—1766, in welchem die Zahl π durch analytische Ausdrücke mittels einer unendlichen Reihe von Operationen dargestellt wird.

III. Der algebraische Zeitraum 1766—1882, in dem der Nachweis erbracht wird, daß π eine irrationale Zahl ist.

IV. Die endgültige Erledigung des Problems 1882 durch *Lindemann*, der nachwies, daß π eine transzendente Zahl ist, daß also die Quadratur des Kreises durch Zirkel und Lineal unmöglich ist; in der Folgezeit wird der Lindemannsche Beweis durch die Arbeiten deutscher Mathematiker noch weiter vereinfacht.

ZWEITES KAPITEL

DER ELEMENTAR-GEOMETRISCHE ZEITRAUM

§ 3. Die Ägypter, Chinesen, ältesten Inder und Babylonier.

In den Uranfängen der mathematischen Wissenschaft, in der sog. naiven Zeit, suchte man die Aufgabe, einen Kreis in ein inhaltgleiches Quadrat zu verwandeln oder, was ja auf dasselbe hinauskommt, den Umfang eines Kreises als

Strecke darzustellen, durch einfaches Messen oder in noch roherer Weise durch Abschätzen zu lösen.

Schon in dem ältesten mathematischen Buch, dem im britischen Museum in London aufbewahrten *Papyrus Rhind*[1]) findet sich ein Näherungswert für π. In diesem sog. Rechenbuch des **Ägypters** *Ahmes*, das wahrscheinlich ein um 1600 bis 1700 v. Chr. entstandenes Schulheft ist, und das nach eigenen Angaben des Verfassers auf noch ältere Quellen zurückgreift, findet sich folgende Regel zur Bildung eines dem Kreise flächengleichen Quadrats: Die Quadratseite ist $\frac{8}{9}$ des Kreisdurchmessers. Dies ergäbe

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16049\ldots,$$

also verglichen mit dem tatsächlichen Wert 3,14159265 ... eine ganz beträchtliche Genauigkeit. Diese Regel tritt in spätägyptischer Zeit wiederholt auf. Über die Entstehung dieses auffallend genauen Näherungswerts ist nichts Genaues bekannt. Vermutlich ist er auf dem Weg des Versuchs gewonnen worden durch Vergleich der Höhen, bis zu denen dieselbe Wassermenge in einem zylindrischen und einem quaderförmigen Behälter steigt. Vielleicht ist der Wert $\frac{8}{9}$ auch als Mittel aus der Seite des umbeschriebenen und der Seite des einbeschriebenen Quadrats gefunden worden. Hat ersteres die Seite 1, so ist die Seitenlänge des einbeschriebenen Quadrats $\frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}707 \approx \frac{7}{9}$.[2])

Das älteste mathematische Buch der **Chinesen**, das „heilige Buch der Rechenkunst" Chou-pei suan-ching, dessen ältester Teil auf etwa 1100 v. Chr. zurückgreift, hat in seinem zweiten Teil, dessen Entstehung zwischen 213 v. Chr.[3]) und

1) Rhind ist der Name des Entdeckers und ursprünglichen Besitzers des Papyrus.

2) Das Zeichen $\approx$ hat die Bedeutung „näherungsweise gleich".

3) In diesem Jahr ließ nämlich der Kaiser Tsin she huâng ty sämtliche vorhandenen Bücher verbrennen. Seinem Nachfolger, der einem anderen Herrschergeschlecht angehörte, verdanken wir die Rettung der dem allgemeinen Flammentod entgangenen Überreste altchinesischer Wissenschaft.

300 n. Chr. angesetzt wird, für π den wesentlich schlechteren Näherungswert $\pi = 3$. Im 3. Jahrhundert n. Chr. begegnen wir bei *Liu Hui* den erheblich genaueren Näherungswerten $\pi \approx \frac{22}{7}$ und $\pi \approx \frac{157}{50} = 3{,}14$.

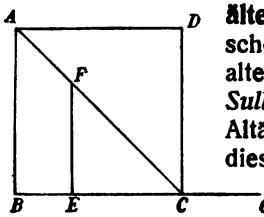


Fig. 1.

Neuere Untersuchungen haben dargetan, daß bei den **ältesten Indern** einheimische mathematische Kenntnisse vorhanden sind. In den alten indischen Religionsbüchern, den *Sulba-Sûtras* finden sich für den Bau von Altären sehr genaue Vorschriften. Werden diese nicht peinlich genau befolgt, so nimmt die Gottheit das dargebrachte Opfer nicht an und der Beter kann nicht auf Erhörung seiner Bitte durch die Gottheit hoffen. Einer der Verfasser dieses Priesterhandbuchs, *Baudhâyana*, der vielleicht im 6. vorchristlichen Jahrhundert lebte, ist mit dem ihm überlieferten älteren Wert von $\pi = \left(\frac{7}{4}\right)^2 = 3{,}0625$ nicht zufrieden. Zur *Zirkulatur des Quadrats ABCD* (von der Seite a und der Diagonale $a\sqrt{2}$) nimmt er (Fig. 1) den Durchmesser des flächengleichen Kreises $= \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}a\sqrt{2} = CE + AF = CE + CG = EG$; der Halbmesser des Kreises, der den gleichen Flächeninhalt wie das gegebene Quadrat hat, wird $r = \frac{a}{6}(2 + \sqrt{2})$. Damit kommt aus

$$\frac{a^2}{36}(2 + \sqrt{2})^2 \pi = a^2$$

$$\sqrt{\pi} \approx \frac{6}{2 + \sqrt{2}} = 3(2 - \sqrt{2}),$$

also

$$\pi \approx 18(3 - 2\sqrt{2}) \approx 3{,}0883\ldots$$

Dieser Wert ist wahrscheinlich auf empirischem Weg gefunden worden; er ist das erste Beispiel eines durch *Mittelbildung hergestellten Näherungswerts.*

Eine andere Rechenvorschrift lautet: „Teile (den Durchmesser) in 15 Teile und nimm 2 weg, das (was übrigbleibt)

ist ungefähr die Seite des Quadrats." Damit wird der Inhalt des Kreises $\left(\frac{13}{15} \cdot 2r\right)^2 = \left(\frac{26}{15} r\right)^2 = 3\frac{1}{225} r^2$. Darin liegt die Annahme $\pi \approx 3\frac{1}{225}$, ein Wert, der von $\pi \approx 3$ nicht wesentlich abweicht.

Die Kenntnis der Tatsache, daß der Kreisradius genau 6mal als Sehne in den Kreis eingetragen werden kann, so daß ein regelmäßiges Sechseck entsteht, ist babylonischen Ursprungs. Dies führte zu der freilich sehr ungenauen Annahme, daß der Kreisumfang das Sechsfache des Kreishalbmessers, also das Dreifache des Durchmessers sei. Auch in der *Bibel* findet sich dieser babylonische Näherungswert. So heißt es bei der Beschreibung des Salomonischen Tempelbaus (966 bis 955 v. Chr.) von dem ehernen Meer, einem kreisrunden Waschgefäß, in 1. Kön. 7, 23 und 2. Chron. 4, 2: „Und er fertigte das Meer, aus Erz gegossen, von einem Rande bis zum andern 10 Ellen weit, ringsum rund, und eine Schnur von 30 Ellen umspannte dasselbe ringsum." Eine tatsächliche Messung wird dieser Angabe kaum zugrunde liegen, denn eine solche hätte einen Umfang von annähernd 32 Ellen ergeben. Es ist wahrscheinlich, daß der Umfang von 30 Ellen wirklich aus 3×10 berechnet wurde und daß der Verfasser der Chronika sich dieser rohen Annäherung bewußt war. Auch eine Stelle im Talmud weist auf die Multiplikation mit 3 hin: „Was im Umfang drei Handbreiten hat, ist eine Hand breit."

Der Wert $\pi \approx 3$ ist häufig auch heute noch in der Praxis (und nur darum handelte es sich in jenen alten Zeiten) völlig genügend.

§ 4. Die Griechen

Von den griechischen Mathematikern hat sich nach einem Bericht von Plutarch zuerst *Anaxagoras* (500 bis 428 v. Chr.) mit der Kreisquadratur beschäftigt; er soll im Gefängnis, in das er 434 v. Chr. als Freund und einstiger Lehrer des großen athenischen Staatsmannes Perikles von dessen Feinden gebracht wurde, „die Quadratur des Kreises" gezeichnet haben. Genaueres ist über seine Ergebnisse nicht bekannt;

doch hat sich Anaxagoras das unstreitige Verdienst erworben, zu wissenschaftlicher Bearbeitung dieses einen der drei berühmten Probleme des Altertums – der Quadratur des Kreises, der Dreiteilung des Winkels und der Verdoppelung des Würfels – angeregt zu haben. Die ganze höhere Geometrie der Griechen führt auf diese Probleme zurück und es gab im alten Griechenland kaum einen Mathematiker von Rang, der sich nicht wenigstens mit einem dieser drei Probleme beschäftigte.

Auf drei Wegen suchten die Griechen der Lösung dieser Aufgaben näher zu kommen: entweder mit Zirkel und Lineal, oder mit mechanisch konstruierbaren Kurven oder endlich durch angenäherte Berechnung. Erst das 19. Jahrhundert hat den Beweis erbracht, daß nur der dritte der richtige ist.

Auf geometrischem Wege versucht *Antiphon* (um 430 v. Chr.) die Lösung der Aufgabe. Er zeichnet in den Kreis ein Quadrat ein, dann das Achteck, Sechzehneck usf. und fährt mit dieser Konstruktion so lange fort, bis dadurch der Kreis völlig erschöpft ist, d. h. bis das regelmäßige Vieleck von dem Kreis nicht mehr zu unterscheiden ist. Antiphon sagt nun: In den Elementen der Geometrie werde gelehrt, wie man jedes Vieleck in ein Quadrat verwandeln könne, also erhalte man auf diese Weise schließlich ein dem Kreis flächengleiches Quadrat. Wenn auch dieser Schluß unrichtig ist – Antiphon übersah nämlich, daß auf diese Weise nur eine angenäherte Quadratur zu erreichen ist –, so ist er doch der erste gewesen, der den später von Archimedes u. a. erfolgreich betretenen Weg vorgezeigt hat, den Flächeninhalt eines krummlinig begrenzten Raumes dadurch zu ermitteln, daß er ihn durch Vielecke von immer wachsender Seitenzahl zu erschöpfen[1]) suchte. Antiphons Zeitgenosse *Bryson* von Heraklăa benutzte außer den einbeschriebenen auch die dem Kreis umbeschriebenen regelmäßigen Vielecke und führte damit den *Begriff der oberen und unteren Grenze* ein. Allerdings war seine Annahme, daß die Kreisfläche das arithmetische Mittel des ein- und umbeschriebenen Quadrats sei, ein Irrtum.

1) Einen auf solche Überlegungen gegründeten Beweis nennt man *Exhaustionsbeweis* (exhaurire = erschöpfen).

Hippokrates von Chios, der in der zweiten Hälfte des 5. Jahrhunderts in Athen lebte, hat sich mit der Quadratur von sog. Möndchen beschäftigt und hat damit das erste Beispiel einer genauen Quadratur krummlinig begrenzter Flächenräume gegeben. Als „Möndchen" bezeichnet er ein zwischen zwei Kreisbögen liegendes, sichelförmiges Flächenstück. Beschreibt man über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks ABC die Halbkreise, so entstehen zwei solcher Möndchen. Es gilt dann der Satz (Fig. 2):

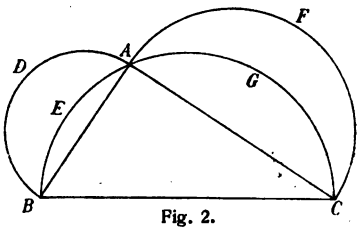


Fig. 2.

$$\text{Mond } ADBE + \text{Mond } AFCG = \Delta ABC.$$

Dieser Satz findet sich aber bei Hippokrates nicht; er ist erst sehr viel später bewiesen worden. Dagegen stammt von Hippokrates der Beweis des Satzes, daß sich zwei Kreisflächen wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten.

Mit *Archimedes* tritt der erste Mathematiker auf, welcher der Aufgabe eine gründliche wissenschaftliche Bearbeitung zuteil werden ließ. Von den vier großen Männern, deren Leistungen im 4. vorchristlichen Jahrhundert die Mathematik zur höchsten Blüte bei den Griechen brachten, nämlich *Euklid, Eratosthenes, Archimedes* und *Apollonius* ist wahrscheinlich Archimedes der einzige, der sich mit der Kreisquadratur beschäftigte. Ihm verdankt man die Auffindung einer oberen und unteren Grenze für π:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Der Wert $3\frac{1}{7}$ mag wohl schon vor Archimedes empirisch an kreisförmigen Marmorarbeiten ermittelt worden sein. Das Verdienst von Archimedes besteht darin, gezeigt zu haben, daß $3\frac{1}{7}$ kein genauer Wert, sondern nur eine obere Grenze ist. Obwohl der Wert $3\frac{1}{7}$ dem tatsächlichen Wert von π nicht so

nahe kommt wie die untere Grenze $3\frac{10}{71}$ $\left(3\frac{1}{7} = 3{,}14285714\ldots,\right.$ $\left.\pi = 3{,}14159265\ldots,\ 3\frac{10}{71} = 3{,}14084507\ldots\right)$, so wird doch der erstere Wert $3\frac{1}{7}$ seiner Einfachheit halber heute noch vielfach benützt. Nicht nur war damit die Zahl π zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, sondern der von Archimedes eingeschlagene Weg zu ihrer Auffindung wurde bis zur Erfindung der Differentialrechnung, also fast zwei Jahrtausende hindurch von allen denjenigen begangen, die sich mit der Kreisquadratur befaßten. Den archimedischen Näherungswert $3\frac{1}{7}$ finden wir bald darauf in Alexandrien, wo er den ungenaueren ägyptischen Wert $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ rasch verdrängte, und von diesem Kulturmittelpunkt des griechischen Altertums aus kam der neue Wert bald nach Indien und sogar nach China. So groß war das Vertrauen zu Archimedes' Leistung, daß neu gefundene Näherungswerte von Fachmathematikern nur dann als Verbesserung anerkannt wurden, wenn sie innerhalb der archimedischen Grenzen lagen; im späten Mittelalter gingen manche Laien auf mathematischem Gebiet sogar so weit, den archimedischen Wert für genau zu halten.

In einer späteren, leider verloren gegangenen Schrift des Archimedes finden sich nach Angabe von *Heron* (wahrscheinlich zweite Hälfte des 1. Jahrhunderts vor Chr., Alexandrien) zwei wesentlich genauere Näherungswerte:

$$\frac{211882}{67441}\ (= 3{,}1415904\ldots) < \pi < \frac{195882}{62351}\ (= 3{,}1416016\ldots).$$

Der erste dieser Werte stimmt, wie wir jetzt wissen, bis auf 5 Dezimalen mit dem wahren Werte überein.

Die von Archimedes gefundenen Ergebnisse sind jedenfalls so bedeutend, daß sich ein näheres Eingehen auf sie empfiehlt. Archimedes beweist in seiner Abhandlung: „Die Kreismessung" folgende drei **Sätze**:

1. Jeder Kreis ist einem rechtwinkligen Dreieck inhaltsgleich, wenn der Radius gleich der einen der den rechten Winkel einschließenden Seiten, der Umfang aber gleich der Basis ist.

2. Der Kreis hat zum Quadrat seines Durchmessers nahezu ein Verhältnis wie 11 : 14.

3. Der Umfang eines jeden Kreises ist dreimal so groß als der Durchmesser und noch um etwas größer, nämlich um weniger als $\frac{1}{7}$, aber um mehr als $\frac{10}{71}$ des Durchmessers.

Der 1. Satz wird indirekt bewiesen; der 2. Satz stützt sich auf den 3. Dieser 3. Satz ist eine der wunderbarsten mathematischen Leistungen des Altertums und wir sind im Zweifel, was mehr unsere Bewunderung verdient: die großartige Rechengewandtheit oder die geniale Beweisführung.

Wir, die glücklichen Besitzer des indischen Zahlen- und des Dezimalsystems haben wohl kaum eine Ahnung von den außerordentlichen Schwierigkeiten der Zahlenrechnung des Archimedes, bei der es sich mehrmals um das Ausziehen von Quadratwurzeln handelte.[1]) Wenn die gefundenen Ergebnisse mit dem tatsächlichn Wert nur in geringem Maße übereinstimmen, nämlich nur bis auf 1 bis 2 Tausendstel, so beweist dies geradezu die Schwierigkeit der von Archimedes behandelten Aufgabe.

Zur Berechnung von π benützt Archimedes die schon von Antiphon und Bryson angegebene **Methode**: Zur Auffindung einer unteren Grenze geht er vom regelmäßigen einbeschriebenen Sechseck (u_6) aus, geht dann zum Zwölfeck (u_{12}) usf. bis zum 96-Eck (u_{96}) über. Die Näherungswerte der hierbei auftretenden Quadratwurzeln wählt er absichtlich immer etwas zu klein, um so eine sichere untere Grenze für den Umfang u_n des einbeschriebenen n-Ecks und um so mehr für den Kreisumfang zu erhalten.

Eine obere Grenze ergibt sich auf demselben Weg, ausgehend vom umbeschriebenen regelmäßigen Sechseck (U_6) und aufsteigend bis zum umbeschriebenen regelmäßigen 96-Eck (U_{96}).

Ist $AC = r$ (Fig. 3) der Radius des Inkreises mit Mittelpunkt A, C der Berührungspunkt der Sechseckseite $S_6 = BB'$, so ist $BB' = AB = a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$, woraus $r : \frac{a}{2} = \sqrt{3} : 1$. Für $\sqrt{3}$

1) Zeuthen, Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter. Leipzig 1912. (Die Kultur der Gegenwart von Hinneberg, Teil III Abt. 1) S. 27.

nimmt Archimedes den etwas zu kleinen Wert $\frac{265}{153}$, so daß die Proportion entsteht

(1) $$r : \frac{a}{2} = AC : BC > 265 : 153.$$

Hieraus folgt

$$(r + a) : \frac{a}{2} = (AC + AB) : BC > (265 + 2 \cdot 153) : 153$$

$$> 571 : 153.$$

Halbiert man den $\sphericalangle BAC$ durch AD, so ist DC die halbe Zwölfecksseite $\left(\frac{1}{2} S_{12}\right)$ und es gilt der bekannte Satz:

$$AB : AC = BD : DC,$$

woraus sich nach dem Satz von der korrespondierenden Addition ergibt

$$(AB + AC) : AC = (BD + DC) : DC$$

oder

$$AC : DC = (AB + AC) : BC.$$

Wenn man den in (1) gefundenen Wert hierin einsetzt, gibt das

(2) $$AC : DC > 571 : 153$$

oder

$$r : \frac{1}{2} S_{12} > 571 : 153,$$

also

$$r : U_{12} > 571 : 3672.$$

Erhebt man rechts und links ins Quadrat, so kommt

$$AC^2 : DC^2 > 571^2 : 153^2,$$

woraus

$$(AC^2 + DC^2) : DC^2 > 349450 : 153^2$$

oder, da $\triangle ACD$ rechtwinklig ist, also $AC^2 + DC^2 = AD^2$,

$$AD^2 : DC^2 > 349450 : 153^2$$

oder

(3) $$AD : DC > 591\frac{1}{8} : 153.$$

Halbiert man $\sphericalangle DAC$ durch AE, so hat man

$$AD : AC = ED : EC,$$

also

(4) $\quad (AD + AC) : AC = (ED + EC) : EC = DC : EC$

oder

$$(AD + AC) : DC = AC : EC.$$

Aus (2) und (3) folgt nun, da

$$EC = \frac{1}{2} S_{24}$$

$$(AD + AC) : AC >$$

$$\left(571 + 591\tfrac{1}{8}\right) : 153 > 1162\tfrac{1}{8} : 153,$$

also gemäß (4)

$$AC : EC > 1162\tfrac{1}{8} : 153$$

oder

$$r : \tfrac{1}{2} S_{24} > 1162\tfrac{1}{8} : 153,$$

somit

$$r : U_{24} > 1162\tfrac{1}{8} : 7344.$$

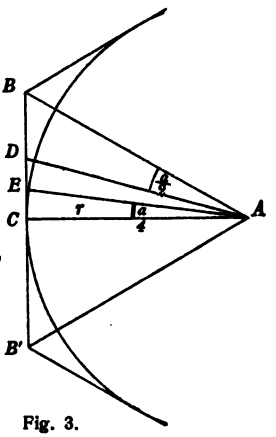


Fig. 3.

Dieses Verfahren wird nun von Archimedes mit immer etwas zu klein gewählten Wurzelwerten bis zum 96-Eck fortgesetzt. Hier findet er schließlich

$$r : \tfrac{1}{2} S_{96} > 4673\tfrac{1}{2} : 153,$$

also

$$r : U_{96} > 4673\tfrac{1}{2} : 29\,376,$$

woraus sich, da $2\pi r < U_{96}$ ist, für das gesuchte Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser um so sicherer ergibt:

$$2\pi r : 2r < 29376 : 2 \cdot 4673\tfrac{1}{2} < 14688 : 4673\tfrac{1}{2}.$$

Diese Proportion liefert eine *obere Grenze* für den gesuchten Näherungswert von π.

Zur Bestimmung der *unteren Grenze* geht Archimedes

vom einbeschriebenen gleichseitigen Dreieck aus. Durch Halbierung der Zentriwinkel steigt er zum 6-Eck, 12-Eck, 24-Eck, 48-Eck bis zum 96-Eck auf; er erhält schließlich für den Umfang u_{96} des einbeschriebenen 96-Ecks

$$u_{96} : 2r > 6336 : 2017\tfrac{1}{4},$$

also um so mehr

$$2\pi r : 2r > 6336 : 2017\tfrac{1}{4}.$$

Damit ist die doppelte Begrenzung gefunden

$$14688 : 4673\tfrac{1}{2} > 2\pi r : 2r > 6336 : 2017\tfrac{1}{4}$$

oder

$$3{,}1428\cdots > \pi > 3{,}1409\cdots$$

Durch Abrundung der unteren Grenze nach unten $\left(3\frac{10}{71}\right)$, der oberen Grenze nach oben $\left(3\frac{1}{7}\right)$ leitet Archimedes die bereits angegebene Begrenzung her

$$3\tfrac{10}{71} < \pi < 3\tfrac{1}{7}.$$

Damit war der Wert $3\frac{1}{7}$ gefunden, der rasch seinen Siegeszug durch alle Länder antrat, in denen die Geometrie eine Heimstätte fand.

Apollonius von Pergä (um 200 n. Chr.) scheint nach den Nachrichten eines Kommentators *Eutocius* (etwa 550 n. Chr.) die Untersuchungen von Archimedes wieder aufgenommen und wesentlich genauere Ergebnisse erzielt zu haben. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß Apollonius den sehr genauen Näherungswert

$$\pi \approx 3\tfrac{177}{1250} = 3{,}1416$$

gefunden hat, ein Wert, der wie so manche andere Resultate griechischer Mathematik seinen Weg nach Indien fand, wo er im 5. Jahrhundert n. Chr. auftritt.

Hipparch (etwa 180 bis 125 v. Chr.) ist durch die Berechnung einer leider verloren gegangenen Sehnentafel der Begründer der Trigonometrie geworden, einer mit der Kreis-

messung eng verknüpften Wissenschaft. Er hat allerdings damit das Problem der Kreiquadratur nicht unmittelbar, wohl aber mittelbar gefördert.

Bei *Ptolemäus* (zwischen 151 und 125 v. Chr.) findet sich ein Näherungswert, der dem von Apollonius sehr nahe kommt, $\pi \approx 3\frac{17}{120}$. Teilt man den Kreisdurchmesser in 120 Teile, den Halbmesser also in 60 Teile (Sexagesimalteilung), so entsprechen den beiden archimedischen Werten in diesem ptolemäischen Sexagesimalsystem die Werte

$$3\frac{1}{7} = 3 + \frac{8}{60} + \frac{34{,}28}{3600} \quad \text{und} \quad 3\frac{10}{71} = 3 + \frac{8}{60} + \frac{27{,}04}{3600}.$$

Hieraus ergibt sich der runde Mittelwert

$$3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} = 3\frac{17}{120} = 3{,}14166\cdots$$

Da Ptolemäus über den Grad der Annäherung keinerlei Angaben macht, so ist es kaum zweifelhaft, daß er sich der großen Genauigkeit seines Werts nicht bewußt war.

Um 335 v. Chr. versuchte *Dinostratus* die Quadratur des Kreises zu finden, indem er hiezu eine Kurve verwendete, deren einzelne Punkte mechanisch[1]) durch Anwendung von Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Schon ein Jahrhundert früher hatte der Sophist[2]) *Hippias* von Elis (um 420 v. Chr.) die Lösung des Problems der Dreiteilung des Winkels auf dieselbe Art versucht: er verwandte hiezu eine Kurve, die später den lateinischen Namen **Quadratrix**[3]) erhielt infolge ihrer Benutzung zur Kreisquadratur durch

---

1) Natürlich ist auch die Kreislinie „mechanisch" konstruierbar; aber während der Zirkel die ganze Kreislinie in einem Zuge liefert, bekommt man bei der Konstruktion von Dinostratus nur einzelne Kurvenpunkte, aber keinen Kurvenzug.

2) Die Sophisten waren dafür bekannt, daß sie ihren eigenen Vorteil über alles stellten und gegen Bezahlung andere ihres Vorteils wahrnehmen lehrten. Durch Beredsamkeit, Scharfsinn und Schlagfertigkeit, die selbst vor Trugschlüssen nicht zurückschreckte, suchten sie sich Einfluß und Geltung im Staatswesen und vor Gericht zu verschaffen. Hippias war einer ihrer Hauptvertreter.

3) Pappus nennt sie τετραγωνίζουσα.

Dinostratus. Geometrisch wird die Kurve folgendermaßen bestimmt: Gegeben ist ein Kreis mit zwei aufeinander senkrechten Durchmessern OA und OB (Fig. 4). Auf OB von O aus und auf dem Bogen AB von A aus bewegen sich zwei Punkte M und L mit gleichförmiger Geschwindigkeit derart, daß beide zur selben Zeit in B ankommen. Zieht man OL und durch M zu OA die Parallele, so ist der Schnittpunkt P ein Kurvenpunkt.

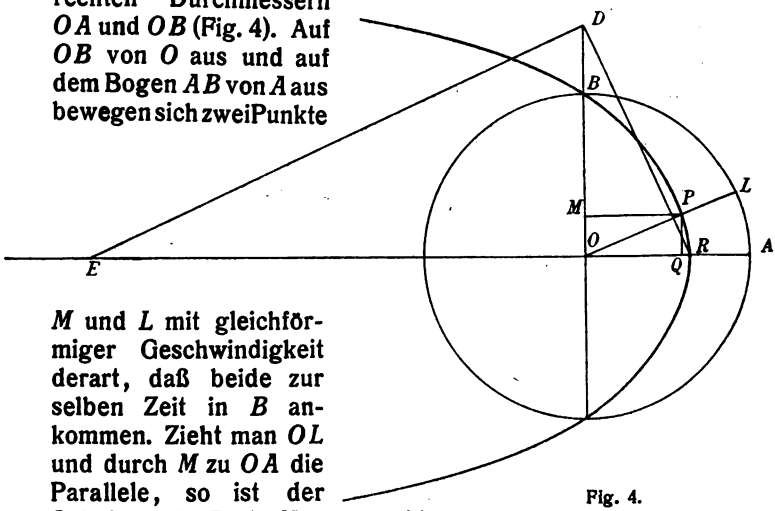


Fig. 4.

Setzt man den Kreisradius gleich 1 und macht (Fig. 4) OA zur x-Achse, OB zur y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so ist

$$MP = x,\ OM = y;\ \tan POA \equiv \tan \varphi = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x}.$$

Ist $OM = \frac{1}{n}$, wo n irgendeine ganze Zahl bedeutet, so ist der Bogen AL der n^{te} Teil des Bogens AB. Da der Kreisbogen AB ein Viertel des Umfangs, also $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$ ist, so ist

$$y = \frac{1}{n};\ \frac{y}{x} = \tan \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Eliminiert man hieraus n, so erhält man als Gleichung der Quadratrix in Punktkoordinaten

$$(1) \qquad \frac{y}{x} = \tan \frac{\pi y}{2}$$

oder

$$x = \frac{y}{\tan\frac{\pi y}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\frac{\pi y}{2}}{\tan\frac{\pi y}{2}}.$$

Ist R der Schnittpunkt der Kurve mit der x-Achse, so ersich $OR = x$, wenn wir in der Kurvengleichung y nach Null konvergieren lassen; also wird

$$OR = x = \frac{2}{\pi} \lim_{y=0} \frac{\frac{\pi y}{2}}{\tan\frac{\pi y}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

oder

$$OR : \sqrt{2} = \sqrt{2} : \pi. \tag{2}$$

Hieraus ergibt sich folgende **Näherungskonstruktion:** Trage auf dem Kreisradius OB das Stück $OD = AB\ (= \sqrt{2})$ ab; ziehe $ED \perp RD$, so ist $OE = \pi$ der halbe Kreisumfang, denn im rechtwinkligen $\triangle EDR$ ist $OD^2 = OE.\,OQ$. Hiebei ist aber zu berücksichtigen, daß gerade der für uns wichtigste Kurvenpunkt R durch unsere Konstruktion nicht geliefert wird, da die Parallele MP und der Kreisradius OP für diesen Fall beide in OR fallen. Wir sehen also, daß die Quadratrix das Problem mit Zirkel und Lineal nicht löst, da der wesentlichste Kurvenpunkt R nur angenähert erhalten wird als Schnittpunkt des Kurvenzugs der Punkte P mit OA.

Der Gedanke, die Quadratur des Kreises graphisch zu lösen durch Benützung von Kurven, hat im 19. Jahrhundert zur Erfindung des Integraphen geführt, eines Instruments, das imstande ist, für unsere Zwecke besonders geeignete Kurven in einem kontinuierlichen Zuge zu beschreiben. Eine solche ist z. B. die Kurve $y = \arcsin x$[1]) (die Arcus-Sinuslinie). Die Ordinaten der Schnittpunkte dieser Kurven mit der y-Achse liefern uns π und alle seine Vielfachen. Vor mehreren Jahrzehnten ist von dem Russen *Abdank-Abakanowicz* ein solches Instrument erfunden worden, das dann von dem Schweizer *Coradi* in Zürich verbessert wurde. Es überschreitet das uns gesteckte Ziel, wenn wir hierauf näher eingehen; wir verweisen den Leser auf die Beschreibung, die sich z. B. bei Enriques (Lit. Verz. Nr. 9) S. 230 ff. findet.

1) Vgl. Anm. 1 Seite 40.

§ 5. Die Römer und Inder des Mittelalters.

Über die *Römer* können wir in unserem Bericht kurz hinweggehen. Denn diesem entschlossenen, tatkräftigen Volke, das für praktische Interessen viel mehr Sinn hatte als für mathematische Spekulationen, genügten die vorhandenen Näherungswerte für die Bedürfnisse der messenden Geometrie vollständig. In den 10 Büchern des genialen Baumeisters *Vitruvius* (um 14 n. Chr.) „De Architectura" wird der Umfang eines Rades mit 4 Fuß Durchmesser auf $12\frac{1}{2}$ Fuß angegeben, was dem ziemlich schlechten Näherungswert $\pi \approx 3\frac{1}{8}$ entspricht.

Wesentlich bessere Ergebnisse finden wir bei den *Indern*. Wahrscheinlich werden die Inder, deren Stärke in der rechnenden Geometrie lag — schon ihr wunderbar gefügtes Zahlensystem weist darauf hin — manche ihrer gerade auf unserem Gebiet gefundenen Ergebnisse griechischen Überlieferungen verdanken, was aber nicht ausschließt, daß sie auch selbständig rechnerische Probleme, wie die Kreisquadratur, bearbeiteten. In der Hauptsache sind die indischen mathematischen Schriftsteller Astronomen und Astrologen; die mathematischen Vorkenntnisse, deren sie bedurften, entwickelten sie meist in den einleitenden Abschnitten ihrer Schriften oder in gelegentlichen Abschweifungen. Dies ist wenigstens bei den drei mathematischen Astronomen der Fall, die unsere Aufmerksamkeit verdienen, *Aryabhatta* (geb. 476), *Brahmagupta* (geb. 598) und *Bhaskara* (geb. 1114). *Aryabhatta* berechnete seinen Näherungswert

$$\pi \approx 3{,}1416 = \frac{31416}{10000}$$

aus dem einbeschriebenen 384-Eck (= 6.64-Eck) nach der gegenüber der archimedischen Rechnungsweise wesentlich bequemeren Formel

$$s_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_n^2}.$$

Ist in Fig. 5 $AB = s_{2n}$, $AC = s_n$ und $MD = \rho_{2n}$, so folgt

$$\Delta ABE \sim \Delta MBD,$$

also, wenn $MA = r$ ist,

$$s_{2n} : r = \frac{1}{2} s_n : \rho_{2n},$$

woraus

(1) $$2 s_{2n} \rho_{2n} = r s_n.$$

Aus dem rechtwinkligen ΔADM folgt

$$\rho_{2n}^2 = r^2 - \frac{1}{4} s_{2n}^2,$$

also

$$2\rho_{2n} = \sqrt{4r^2 - s_{2n}^2}.$$

Setzt man diesen Wert für ρ_{2n} in (1) ein, so kommt nach einfacher Umformung

$$s_{n2}^4 - 4r^2 s_{2n}^2 + r^2 s_n^2 = 0,$$

woraus

$$s_{2n}^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{4r^2 - s_n^2}.$$

Setzt man hierin $r = 1$, so erhält man endlich

$$s_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_n^2}.$$

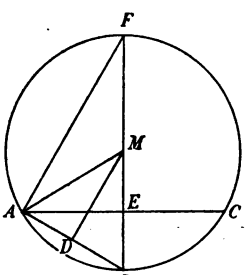


Fig. 5.

Die Seite des einem Kreis mit Radius 1 einbeschriebenen Quadrats ist bekanntlich

$$s_4 = \sqrt{2}.$$

Damit kommt aus der obigen Formel für die Seite des einbeschriebenen 8-Ecks

$$s_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Fährt man in der Berechnung so fort, so erhält man

$$s_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

$$s_{32} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}},$$

$$s_{64} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}, \ldots$$

also wird:

$$u_{16} = 16\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}};$$

$$u_{32} = 32\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}};$$

$$u_{64} = 64\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}.$$

Aryabhatta erhält so aus u_{384} das Verhältnis

$$\pi \approx \frac{3927}{1250} = \frac{31416}{10000} = 3{,}1416.$$

Denselben Wert finden wir auch bei *Bhaskara*, welcher diesen Wert den „genauen" nennt im Gegensatz zu dem „ungenauen" $\frac{22}{7}$. In Bhaskaras Werk Siddhânta-Siromâni (die Krönung des Systems) finden wir in dem die Arithmetik behandelnden Abschnitt Lilavati (die Reizende) auch den ptolemäischen Wert $\frac{377}{120}$.

Bei *Brahmagupta*, der als Arithmetiker entfernt nicht an Bhaskara heranreicht, stoßen wir auf den echt indischen Wert $\pi = \sqrt{10}$. Wird der Kreisdurchmesser gleich 1 gesetzt, so findet man der Reihe nach aus den oben angegebenen Wurzelausdrücken

$$u_{12} = \sqrt{9{,}65},\ u_{24} = \sqrt{9{,}81},\ u_{48} = \sqrt{9{,}86},\ u_{96} = \sqrt{9{,}87},$$

so daß die Vermutung naheliegt

$$\pi = u_{\infty} \approx \sqrt{10}.$$

§ 6. Die Araber.

Im siebenten Jahrhundert tritt ein neues Volk in den Kreis der Kulturvölker, die Araber. Sie sind es vor allem gewesen, die uns durch ihre Übersetzungen die Schätze der

griechischen und indischen Geistestätigkeit überliefert haben. Das Herrschergeschlecht der Omaijaden, das von der Mitte des 7. bis zu der des 8. Jahrhunderts in Damaskus residierte und dessen bekanntestes Glied Karls des Großen Zeitgenosse Harun Al Raschid ist, hatte sich die Pflege der Wissenschaft zur vornehmsten Aufgabe gemacht. Mit allen Mitteln erwarb man griechische (und indische) Manuskripte, die von Fachgelehrten übersetzt und zugleich erläutert wurden. So wurden der Reihe nach die Schriften von Ptolemäus, die Elemente Euklids, die Kegelschnitte des Apollonius u. a. m. übersetzt und, soweit sie dazu geeignet waren, dem mathematischen Unterricht zugrunde gelegt. Auch die Abhandlung des Archimedes über die Kreismessung war bis zum Beginn des 10. Jahrhunderts ins Arabische übertragen. Allerdings stammten diese gelehrten Übersetzer nicht durchweg aus Arabien; vielfach waren es Angehörige anderer Völkerstämme, wie Syrer, Mesopotamier, Perser, Nordafrikaner und Spanier, später auch Türken und Inder, die alle das Band der gemeinsamen Religion, einer einheitlichen sozialen Kultur und vor allem das der arabischen Sprache umfaßte. Neben dieser Übersetzertätigkeit tritt uns auch eigene Forschung entgegen, freilich auf Grund der von den Griechen geholten Kenntnisse. Als die bedeutendsten arabischen Mathematiker sind zu nennen *Mohammed ibn Musa* mit dem Beinamen: *Alchwarizmi*, (ibn = Sohn), der im 1. Viertel des 9. Jahrhunderts lebte, *Abul Wafa* (940–998) und *Ibn Alhaitam* (958–1038). Dem letzteren verdanken wir eine selbständige Behandlung unseres Problems. Obwohl sich die Araber auf geometrischem Gebiet nicht besonders schöpferisch auszeichneten, so wollen wir doch von der arabischen Mathematik, diesem glanzvollen Gestirn am Himmel der Wissenschaft, nicht scheiden, ohne noch hervorzuheben, daß durch arabische Mathematiker die Algebra und die Trigonometrie auf eine wesentlich höhere Stufe gehoben wurden.

§ 7. Die Völker des Abendlandes bis 1400.

In der Geschichte der Quadratur des Kreises finden wir einen Fortschritt erst im 13. Jahrhundert, wo sich im christlichen Abendland allmählich ein regeres Geistesleben zu ent-

falten begann. Wenn man bedenkt, daß die Gelehrtensprache des früheren Mittelalters das Lateinische war und wie gering die Leistungen der Römer auf dem Gebiet der Mathematik waren, so erscheint diese lange unfruchtbare Zeit nicht befremdlich. Erst als die Gelehrten anfingen, auf dem Umweg über die arabischen Schriften die griechischen Klassiker ins Latein zu übersetzen, befaßte man sich auch im Abendlande wieder mit mathematischen Studien.

Aus der Zeit vor dem 13. Jahrhundert ist nur eine Abhandlung zu nennen, nämlich das in sechs Büchern verfaßte, dem Kölner Erzbischof Hermann II. gewidmete Werk über die Quadratur des Zirkels von *Franco von Lüttich* (um 1040). Aber erst mit *Leonardo von Pisa* (um 1220) tritt für kurze Zeit ein führender Geist in der Geschichte der Geometrie wieder auf. Im Jahr 1220 schrieb er in seiner Vaterstadt Pisa, wo er am Hofe Kaiser Friedrichs II. verkehrte, ein Buch über „praktische Geometrie", worin sich eine Rektifikation des Kreises mittels ein- und umbeschriebener Polygone findet. Indem Leonardo bis zum 96-Eck ging, fand er die Grenzwerte $\frac{1440}{458\frac{1}{2}} = 3{,}1427\ldots$ und $\frac{1440}{458\frac{3}{4}} = 3{,}1410\ldots$, woraus er den Mittelwert ableitete:

$$\pi \approx \frac{1440}{458\frac{1}{3}} = 3{,}1418\ldots.$$

In der nun folgenden Zeit ist die Behandlung unseres Problems auf ihrem Tiefstand angelangt; vielfach wird der archimedische Näherungswert $\pi = 3\frac{1}{7}$ als der genaue Wert angesehen. Wir begnügen uns, wenigstens eine der zahlreichen Schriften zu erwähnen, in denen in echt mittelalterlich scholastischer Weise die Quadratur des Kreises behandelt wird. *Albert von Sachsen*, der als erster mathematischer Universitätslehrer deutscher Abstammung zu nennen ist, untersucht in seiner Abhandlung über die Kreisquadratur zuerst die Frage, ob überhaupt ein flächengleiches Quadrat vorhanden sei. Mit spitzfindiger Logik legt er alle ihm bekannten Gründe und Einwände dar. Hierauf setzt er dem Leser ausführlich auseinander, was man unter der Quadratur des Kreises verstehen könne und was man darunter verstehen müsse. Eine

Berechnung von π liefert er aber nicht, sondern sagt kurzweg, daß das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser wie 22 : 7 sei; hierfür sei zwar, nach der Aussage vieler Philosophen, ein Beweis vorhanden, doch sei dieser sehr schwierig.

§ 8. Von Cusanus bis Huygens.

Zwei Jahrhunderte müssen wir weiterschreiten, um eine wirkliche Förderung unseres Problems verzeichnen zu können. Um die Mitte des 15. Jahrhunderts beginnt jene eigentümliche Reformbewegung, der Humanismus, die den Geist des Altertums wieder neu aufleben ließ und mit die Ursache war, daß die Schriften der griechischen Mathematiker im Original studiert wurden.

Georg von Peurbach (1423–1461) war sich dessen genau bewußt, daß die überlieferten Werte von π, sowohl die des Archimedes und Ptolemäus, als auch die der indischen Mathematiker nur angenähert richtig sind. Besondere Hervorhebung verdient der Umstand, daß Peurbach darüber nicht im Zweifel war, daß sich dieses von uns jetzt durch π bezeichnete Verhältnis überhaupt nicht genau angeben lasse. Der deutsche Kardinal *Nikolaus Cusanus* (1401–1461) hat das Verdienst, bei der Behandlung der Kreisquadratur neue Bahnen begangen zu haben. Er definiert die Kreislinie als Vieleck mit unendlich vielen Seiten und versucht die Umwandlung eines regelmäßigen Vielecks in einen Kreis (Arkufikation der Geraden). Ausgehend vom regelmäßigen Dreieck sucht er ein regelmäßiges Vieleck von immer größerer Seitenzahl, das denselben Umfang wie das Dreieck hat. Indem er zu Vielecken mit immer wachsender Seitenzahl übergeht, kommt er schließlich zum Kreis, dessen Radius zu bestimmen ist, da ja der Kreisumfang bekannt ist. Cusanus fand so auf umständlichem und nicht leicht zu verfolgendem Wege

$$\pi \approx \frac{144}{5\sqrt{84}} = 3{,}142337\ldots,$$

ein Wert, der etwas genauer ist als $3\frac{1}{7}$. Er stellte noch eine ganze Reihe von Konstruktionen auf, die aber sämtlich

die Genauigkeit des eben angegebenen Werts nicht erreichen.

Eine dieser Cusanischen **Konstruktionen** lautet (Fig. 6): Verlängere den Radius $OA = r$ des gegebenen Kreises um die Seite des einbeschriebenen Quadrates bis B; beschreibe über OB als Durchmesser einen Kreis, so ist der Umfang des diesem zweiten Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks $2\pi r$. Es ist

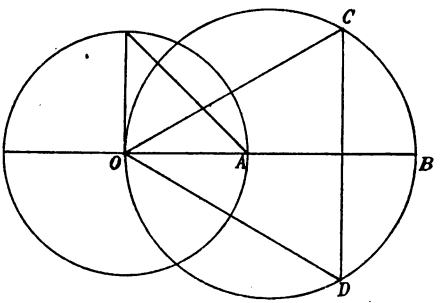


Fig. 6.

$$AB = r\sqrt{2}, \text{ also}$$

$$OB = r + r\sqrt{2} = r(1 + \sqrt{2}) \equiv \rho.$$

Da aber im Kreis mit Radius ρ die Seite des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks $\frac{\rho}{2}\sqrt{3}$ ist, so folgt daraus

$$2\pi r \approx \frac{3\rho}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{4} r\sqrt{3}(1 + \sqrt{2}),$$

also (mit $r = 1$)

$$\pi \approx \frac{3}{4}\sqrt{3}(1 + \sqrt{2}) = \frac{3}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{6}) = 3{,}1361\ldots$$

Ist x der Zentriwinkel eines Kreisbogens AE (Fig. 7), also rx die Länge des Bogens AE, so ist nach Cusanus

$$AE = rx \approx \frac{3r \sin x}{2 + \cos x}.$$ [1])

---

1) Entwickelt man die Funktion $\frac{3r \sin x}{2 + \cos x}$ in eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe mit Benutzung der auf S. 40 angegebenen Reihen für $\sin x$ und $\cos x$, so findet man aus

$$\frac{3r \sin x}{2 + \cos x} = r(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots)$$

Hier begegnet uns zum erstenmal eine **Näherungskonstruktion** *für die Rektifikation eines beliebigen Kreisbogens.* Die Formel von Cusanus liefert folgende Konstruktion (Fig. 7):

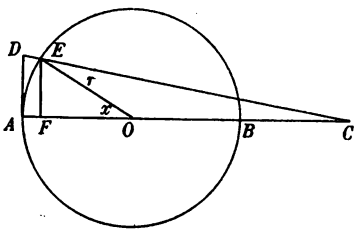


Fig. 7.

AE sei der zu rektifizierende Bogen. Verlängert man den Durchmesser AB um $BC = r$, zieht $DA \perp AB$ und CE, so ist

$$AD \approx \text{Bogen } AE.$$

Aus der Proportion

$$AD : EF = CA : CF$$

folgt mit $EF = r \sin x$, $CF = CO + OF = 2r + r \cos x$, $CA = 3r$:

$$AD = \frac{3r \sin x}{2 + \cos x}.$$

Nun ist aber $AE = rx$ und damit ist die Richtigkeit der Konstruktion erwiesen. Natürlich läßt sich die Formel auch zur Berechnung von π verwenden. Setzt man $x = 30^0$, so erhält man für den Bogen $AE = \frac{\pi r}{6}$ mit $r = 1$

$$\frac{\pi}{6} \approx \frac{3 \sin 30^0}{2 + \cos 30^0} = \frac{3}{4 + \sqrt{3}} = 0{,}52337\ldots \text{ (statt } 0{,}52359\ldots).$$

Eigenartig ist die Methode, wie *Leonardo da Vinci* (1452 bis 1519), eines der größten Universalgenies, welche je ge-

---

$$3r\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= r(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)\left(2 + 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right).$$

Durch Ausmultiplizieren des Produktes der rechten Seite und Vergleichung der Glieder gleich hoher Potenzen der linken und rechten Seite findet man die Werte für die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, ...; es ergibt sich so die Reihe

$$AE = r\left(x - \frac{x^5}{180} - \frac{x^7}{1512} - \cdots\right).$$

Man sieht hieraus, daß der Fehler unserer Konstruktion um so kleiner wird, je kleiner x ist; für $x = 16^0$ beträgt der Fehler etwa $\frac{1}{4}''$, für $x = 36^0$ erst ungefähr $2'$.

lebt haben, die Quadratur des Kreises löste. Ihm, dem Erfinder vieler maschineller Konstruktionen, lag es nahe, das Problem mechanisch zu lösen. Läßt man einen Kreiszylinder, dessen Höhe gleich dem halben Radius seines Querschnitts ist, einmal ganz abrollen, so ist seine Spur, d. h. die von ihm während des Rollens bedeckte Fläche gleich der Fläche des Querschnittkreises.

Im 16. Jahrhundert treffen wir in Frankreich eine Reihe von Mathematikern an, welche sich mit der Kreisquadratur beschäftigten: *Orontius Finaeus* (1494–1555), der Theologe *de Bouvelles* (1740–1553), der mehrere geometrische Näherungskonstruktionen angab, und der Mönch *Johannes Buteo* (1492–1572), der in einem 1559 erschienenen Werke De quadratura circuli eine Übersicht der bisher bekannten Methoden gibt, wobei er z. B. den ptolemäischen Wert $3\frac{17}{120}$ für genauer hält als den archimedischen $3\frac{1}{7}$, während dieser für die Rechnung bequemer sei. *Simon Duchesne*, der in Holland unter dem Namen *Van der Eycke* lebte, glaubte eine genaue Quadratur des Kreises gefunden zu haben. Sein Näherungswert

$$\pi \approx 3\frac{69}{484} = \left(\frac{39}{22}\right)^2 = 3{,}142561\ldots$$

ist bemerkenswert, weil er einen der wenigen quadratischen Näherungswerte bildet. *Ludolf von Kölns* Widerlegung war nicht imstande, ihn in seiner Selbstgefälligkeit zu erschüttern.

Gegen Ende des 16. Jahrhunderts nimmt die Zahl der Kreisquadratoren derart zu, daß wir uns mit einer Auslese begnügen müssen. Durch immer genauere Rechnungen wird die Zahl der richtigen Stellen der Näherungswerte immer größer, die tatsächliche Annäherung an den wahren Wert immer schärfer. Wenn auch manche Quadratoren, wie der bereits erwähnte Duchesne von der Unrichtigkeit ihrer genauen Quadratur nicht zu überzeugen waren, so gab doch mehrfach eine verfehlte Quadratur Veranlassung zu mathematischen Streitschriften, in denen der Fehler einer solchen „genauen" Quadratur nur dadurch nachgewiesen werden

konnte, daß der Wert von π auf eine noch größere Zahl von richtigen Dezimalen angegeben wurde. Gelegentlich griffen in einen solchen Streit auch hervorragende Mathematiker ein, wie *Willebrord Snellius* (1580–1626) und *Christian Huygens* (1629–1695), wodurch das Problem eine wirkliche wissenschaftliche Förderung erfuhr (vgl. S. 35ff.).

Im allgemeinen wurde das archimedische Verfahren benützt, um π mit immer größerer Genauigkeit zu berechnen. Hier ist besonders der Franzose *Vieta* (1540–1603) zu nennen. In einer 1593 erschienenen Abhandlung gibt er einerseits durch Fortsetzung des archimedischen Verfahrens vom 6-Eck bis zum um- und einbeschriebenen $2^{16} \cdot 6$-Eck (393216)-Eck den Wert für π auf 9 Dezimalen genau an: er stellt die Ungleichung auf

$$3{,}1415926535\cdots < \pi < 3{,}1415926537\cdots,$$

deren beide Werte 9 übereinstimmende Dezimalen haben. Andererseits beschreitet er den von Antiphon (S. 10) und Aryabhatta (S. 21f.) angegebenen Weg und setzt deren Verfahren in Rechnung um.

Sind ρ_n und ρ_{2n} die Inkreisradien des einem Kreis vom Radius $r=1$ einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks und $2n$-Ecks, so ist, wie der Leser mit Hilfe der auf S. 21 angegebenen Formeln nachrechnen kann:

$$i_{2n} = \frac{1}{\rho_n} i_n, \text{ also } \frac{i_n}{i_{2n}} = \rho_n;$$

$$\rho_n = \sqrt{1 - \frac{1}{4} s_n^2}; \quad \rho_{2n} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rho_n}.$$

Nun ist für das dem Kreis einbeschriebene Quadrat

$$i_4 = 2 \text{ und } \rho_4 = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Damit erhält man durch Anwendung der Formel

$$\rho_{2n} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rho_n}$$

(1) $$\rho_4 = \sqrt{\frac{1}{2}};$$

$$\rho_8 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}};$$

$$\rho_{16} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}; \cdots.$$

Der Inhalt des Kreises mit dem Radius 1 ist dargestellt durch π; es gilt daher, wie leicht einzusehen, mit wachsendem n das (unendliche) Produkt

$$(2) \qquad \frac{i_4}{\pi} = \lim_{n=\infty} \frac{i_4}{i_8} \cdot \frac{i_8}{i_{16}} \cdot \frac{i_{16}}{i_{32}} \cdots \frac{i_{\frac{n}{4}}}{i_{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{i_{\frac{n}{2}}}{i_n}.$$

Gemäß der Bedingung

$$\frac{i_n}{i_{2n}} = \rho_n$$

nimmt die Gleichung (2) die Form an

$$\frac{i_4}{\pi} = \rho_4 \cdot \rho_8 \cdot \rho_{16} \cdots,$$

woraus sich mit Benutzung der in (1) gefundenen Werte unter Berücksichtigung, daß $i_4 = 2$ ist, das zuerst von *Vieta* aufgestellte *unendliche Produkt* ergibt

$$(3) \quad \frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots.$$

Damit war die erste genaue analytische Darstellung von π und zugleich das erste unendliche Produkt gefunden. Um die Konvergenz dieses Produktes hat sich Vieta nicht bemüht; sie ist erst in neuester Zeit (1891) von *Rudio* streng bewiesen worden.

Der Ausdruck (3) läßt sich durch Benutzung goniometrischer Formeln noch in anderer Form schreiben. Es ist nämlich

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \cos 45^0 = \cos \frac{90^0}{2};$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} = \cos \frac{45^0}{2} = \cos \frac{90^0}{4};$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} = \cos\frac{90^\circ}{8}, \cdots.$$

Damit nimmt der Ausdruck (3) die Form an

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{90^\circ}{2} \cdot \cos\frac{90^\circ}{4} \cdot \cos\frac{90^\circ}{8} \cdots. \tag{4}$$

Dieses weitere unendliche Produkt ist ein besonderer Fall einer zuerst von *Euler* aufgestellten Formel (vgl. S. 55).

Vieta hat außerdem noch eine recht genaue **Näherungskonstruktion** für π angegeben. Aus der Annahme

$$\pi \approx 1{,}8 + \sqrt{1{,}8} = 3{,}1416407 \cdots$$

ergibt sich der Kreisumfang als Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten $\frac{6}{5}$ und $\frac{3}{5}$ des Durchmessers sind.

Der Niederländer *Adriaen van Romen*, latinisiert *Adrianus Romanus* (1561–1615), erhöhte die Kenntnis der genauen Stellen von π auf 15, indem er bis zum 2^{30}-Eck vorging. Eine noch viel größere und bewundernswerte Ausdauer und Rechengeschicklichkeit entwickelte *Ludolf van Ceulen* (1539–1610). Um die Zahl π auf 20 Dezimalen zu erhalten, dringt er nach dem Verfahren von Aryabhatta bis zum $15 \cdot 2^{31}$-Eck vor; schreibt aber in der Schrift: Van den Circkel (Delft 1596): „Wer Lust hat, mag näher kommen (d. h. noch mehr Stellen berechnen)". Später erhöhte er die Zahl der genauen Stellen auf 32 (aus dem 2^{62}-Eck), dann auf 35 mittels der Formel $s_{2n} = \sqrt{2(1-\rho_n)}$. Daß Ludolf auf seine mathematische Leistung nicht wenig stolz war, beweist die Tatsache, daß er in seinem Testament bestimmte, die 35 Dezimalstellen sollten auf seinem Grabstein eingeschrieben werden. Ihm zu Ehren wird hie und da π auch die *Ludolfsche Zahl* genannt, obwohl Ludolf ein recht unbedeutender Mathematiker war und dem Problem keine solch wesentliche Förderung angedeihen ließ, daß er diese Ehre verdiente.

Den uns bis jetzt bekannten rationalen Näherungswerten $3\frac{1}{7}$, $3\frac{10}{71}$ (Archimedes) 3,1416 (Ptolemäus und Inder) reiht sich ein weiterer an

$$\pi \approx \frac{355}{113} = 3{,}1415929\cdots.$$

Dieser wurde bisher dem *Adriaen Anthonisz* (1527–1607, in latinisierter Form *Adrian Metius*) zugeschrieben.[1]) Nach einem Bericht seines Sohnes Adrian (1571–1635, Mathematiker) soll sein Vater diesen Wert dadurch gefunden haben, daß er in einer Streitschrift gegen Duchesne die Grenzen aufstellte

$$3\,\frac{15}{106} < \pi < 3\frac{17}{120} \text{ oder } \frac{333}{106} < \pi < \frac{377}{120}.$$

Durch Mittelbildung aus den beiden Zählern 333 und 377 und den beiden Nennern 106 und 120 entstand der neue Wert $\frac{710}{226}$ oder $\frac{355}{113}$, der trotz seiner kleinen Zahlen auf 6 Dezimalen genau ist. Neueren Forschungen zufolge soll aber ein deutscher Mathematiker *Valentius Otho* (1550–1605) schon vor Metius diesen Wert berechnet haben. Er läßt sich in der Form schreiben

$$\pi \approx \frac{355}{113} = 3\frac{16}{113} = 3 + \frac{4^3}{7^3+8^3},$$

wonach er leicht zu **konstruieren** ist.[2]) Ist $CD = 1$ (Fig. 8) und $CE = \frac{7}{8}$, $AF = \frac{1}{2}$, $FG \parallel CD$ und $FH \parallel EG$, dann ist

$$AH : AG = AF : AE \text{ oder } AH = AG \cdot \frac{AF}{AE}$$

und

$$AG : AC = AF : AE \text{ oder } AG = AC \cdot \frac{AF}{AE}.$$

---

1) Der Näherungswert $\pi \approx \frac{355}{113}$ findet sich schon im 5. Jahrhundert neben dem archimedischen $\frac{22}{7}$ bei dem Chinesen *Tsu-Chung-chih* und wird von ihm der „genaue Wert" genannt gegenüber dem „ungenauen Wert" $\frac{22}{7}$.

2) Diese Näherungskonstruktion stammt von dem holländischen Mathematikprofessor *Jakob de Gelder* (1765–1848, Leyden).

Damit wird, da $AC = 1$ ist,

$$AH = \frac{AF^2}{AE^2}.$$

Nun ist

$$AE^2 = 1 + \frac{7^2}{8^2} = \frac{8^2 + 7^2}{8^2},$$

somit

$$AH = \frac{8^2}{4(7^2 + 8^2)} = \frac{4^2}{7^2 + 8^2}.$$

Der Kreisumfang ist also $2\pi r \approx 3 \cdot AB + AH$.

Der dänische Astronom *Christian Longomontanus* (1562–1647) glaubte 1638 einen vollständig genauen Wert von π ermittelt zu haben. Seine **Konstruktion** ist die folgende (Fig. 9): Ist AC der Kreisdurchmesser, $AB = AO = r = CE$ und $EF = \frac{27}{43} r$, $FG \perp BC$, so soll $BG = \pi r$ sein. Die Rechnung, deren Ausführung wir dem Leser überlassen, liefert

$$BG = \frac{\sqrt{18252}}{43} = 3{,}14186\cdots.$$

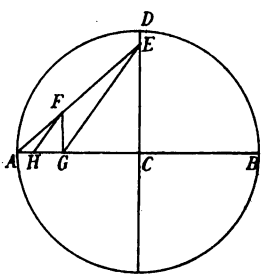


Fig. 8.

Die Konstruktion ist von erheblicher Genauigkeit; für einen Kreis von 1 m Durchmesser beträgt der Fehler weniger als 1 mm. An diesen von Longomontanus ohne Beweis gelieferten „genauen" Wert für π knüpfte sich ein heftiger literarischer Streit mit dem englischen Mathematiker *John Pell* (1610–1685), zu dessen Schlichtung hervorragende Mathematiker wie *Roberval* (1602–1675) und *René Descartes* (1596–1650) ohne Erfolg herbeigezogen wurden.

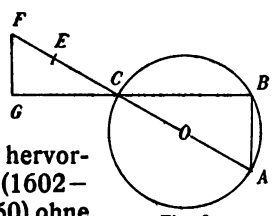


Fig. 9.

Willebrord Snellius (1581–1626) hat das Verdienst, aus den Cusanischen Schriften denjenigen der zahlreichen Versuche des großen Kardinals herausgefunden zu haben, der sich für kleine Winkel zur Rektifikation von Kreisbögen vorteilhaft verwenden läßt. Snellius versuchte auch einen stren-

gen Beweis für die Cusanische Formel zu finden, was aber erst Huygens gelang. Dagegen hat Snellius eine weitere **Näherungskonstruktion** *zur Rektifikation von Kreisbögen* aufgestellt. Zieht man zur Geraden CD der Fig. 7 durch O die Parallele JOK (Fig. 10) und ist $GHK \perp AC$, so kann $\Delta\, GOC$ annähernd als gleichschenklig vorausgesetzt werden, da die Punkte H und B bei kleinem x sehr nahe beieinander liegen. Unter dieser Voraussetzung ist also

$\sphericalangle\, GOH = \sphericalangle\, GCO = \varphi$, also $\sphericalangle\, OGE = \sphericalangle\, OEG = 2\varphi$, somit $\sphericalangle\, EOA = 4\varphi - \varphi = 3\varphi$.[1]) Nun ist

$$AJ = r\tan\varphi,\ DJ = GK = 2GH = 2\cdot r\cdot\sin\varphi.$$

Damit wird $AD = AJ + DJ = r(\tan\varphi + 2\sin\varphi)$, oder, da $\varphi = \frac{x}{3}$,

$$AD = x \approx r\cdot\frac{2\sin x + \tan x}{3}.$$

Wendet man diese Formel und die von Cusanus aufgestellte Formel

$$x \approx r\cdot\frac{3\sin x}{2+\cos x}$$

zur Berechnung von π an, so erhält man aus dem Sechseck ($x = 30^0$) die Grenzen $3{,}14160\cdots$ und $3{,}14023\cdots$, aus dem 96-Eck[2]) dagegen schon die auf 6 Dezimalen genaue

1) Damit ist zugleich die *Dreiteilung (Trisektion) des Winkels EOA* geliefert; für kleine x wird der Trisektionspunkt C dadurch gefunden, daß OB um sich selbst verlängert wird.

2) Natürlich kann dies ohne Benutzung trigonometrischer Tafeln geschehen; $\sin\frac{90^0}{96} = \sin\frac{15^0}{16}$ und $\cos\frac{15^0}{16}$ werden aus $\sin\frac{90^0}{3}$ und $\cos\frac{90^0}{3}$ durch wiederholte Anwendung der trigonometrischen Formeln $2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \sin x$, $2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x$ gewonnen:

$$\sin\frac{15^0}{16} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}};$$

$$\cos\frac{15^0}{16} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}.$$

Begrenzung

$$3{,}14159283\cdots < \pi < 3{,}14159262\cdots;$$

das 2^{30}-Eck liefert Snellius bereits 34 richtige Stellen. Um den großen Rechenvorteil ermessen zu können, der sich durch die Anwendung der Formeln von Snellius und Cusanus gegenüber dem archimedischen Verfahren ergibt, bemerken wir, daß das letztere Verfahren beim Sechseck die Grenzen 3 und $3{,}46\cdots$, beim 96-Eck erst $3{,}1428\cdots$ und $3{,}14112\cdots$ liefert; aus dem 2^{30}-Eck bekam Ludolf van Ceulen nur 14 Dezimalen. Aus der Snellius'schen Formel berechnete der Jesuit *Christoph Grienberger* (1561–1636, aus Tirol) 39 Stellen. Sein Ordensgenosse *Gregorius von St. Vincentius* gab 1647 nicht weniger als vier verschiedene Methoden zur Quadratur des Kreises an, die sich in seinem umfangreichen Werk: „Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni" finden. Dieses Werk rief die verschiedensten, meist absprechenden Urteile hervor. Am lebhaftesten und wie wir gleich bemerken, in einer unser Problem außerordentlich fördernden Weise griff der bereits erwähnte *Christian Huygens* in den Streit ein. Im Jahre 1654 erschien seine Schrift „De circuli magnitudine inventa", in welcher Huygens nicht nur die Formeln von Cusanus und Snellius beweist, sondern auch zeigt, wie man durch lineare Kombination der archimedischen Vieleckszahlen die Zahl π in viel engere Grenzen einschließen kann, als dies Archimedes möglich war.

Für die Formel von Snellius findet er

$$x < \frac{2}{3} r \sin x + \frac{1}{3} r \tan x.$$

Nun ist aber (s. Fig. 10), wenn $2x^0 = \frac{360^\circ}{n}$, d. h. $AE = s_{2n}$, $AL = \frac{1}{2} S_n$, $EM = \frac{1}{2} s_n$ und $3\varphi = x$ ist,

$$r \sin x = \frac{1}{2} s_n, \quad r \tan x = \frac{1}{2} S_n.$$

Summiert man über den ganzen Kreis, so erhält man

$$2\pi r < \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\Sigma s_n + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\Sigma S_n$$

oder

$$2\pi r < \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}U_n.$$

Natürlich gilt die Formel auch für jeden beliebigen Bogen des ganzen Kreises; es ist

(1) $$\text{Bogen} < \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}U_n,$$

wobei dann u_n und U_n die Umfänge des dem Bogen ein- und umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks sind.

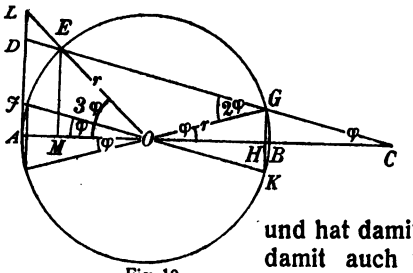


Fig. 10.

Huygens beweist nun außerdem noch folgenden **Satz:**

(2) $$\text{Bogen} > \frac{4}{3}u_{2n} - \frac{1}{3}u_n$$

und hat damit für jeden Kreisbogen und damit auch für den Kreisumfang eine obere und eine untere Grenze gefunden:

(3) $$\frac{1}{3}U_{2n} + \frac{2}{3}u_{2n} > 2\pi r > \frac{4}{3}u_{2n} - \frac{1}{3}u_n.$$

Diese Formel liefert für $n = 6$ die Grenzen

$$3{,}1411\cdots < \pi < 3{,}1423\cdots,$$

für $n = 30$ erhält man hieraus

$$3{,}1415917\cdots < \pi < 3{,}141594\cdots,$$

während Archimedes erst mit dem 96-Eck die zuerst angeführte Begrenzung auf 2 richtige Stellen erhielt. Die Formel (3) liefert also mit relativ einfachen Mitteln ziemlich genaue Werte für π und die Arbeit von Huygens stellt den größten Fortschritt, namentlich nach der praktisch-rechnerischen Seite dar, den das Problem seit Archimedes erreicht hat. Leider fehlt es uns an Raum, auf die Arbeit von Huygens so einzugehen, wie sie es verdient; wir müssen uns begnügen, den Leser auf die im Literaturverzeichnis angegebene Abhandlung von *Kommerell* (Nr. 9) S. 18ff. und das Werk von *Vahlen* (Nr. 7) S. 195ff. hinzuweisen.

Wir wollen nicht unterlassen, noch ausdrücklich darauf hinzuweisen, daß jede der beiden Formeln (1) und (2) **Näherungskonstruktionen** liefert. Setzt man z. B. in Formel (2) $2n = 12$, so ist *der Kreisumfang sehr nahe gleich dem 16-fachen der Seite des dem Kreis einbeschriebenen Zwölfecks vermindert um die doppelte Sechseckseite:*

$$2\pi r > 16 s_{12} - 2 s_6.$$

Aus Formel (1) folgt aber mit $n = 12$:

$$2\pi r < 4 S_{12} + 8 s_{12} < 4 (S_{12} + 2 s_{12}):$$

Der Kreisumfang ist sehr nahe gleich der 4fachen Seite des umbeschriebenen Zwölfecks vermehrt um die 8fache Seite des einbeschriebenen Zwölfecks. Wegen der mehrfachen Streckenaddierungen sind jedoch diese Näherungskonstruktionen praktisch nicht zu empfehlen.

Mit den Arbeiten von Snellius und besonders von Huygens erreicht die geometrisch-rechnerische Behandlung des Problems der Kreismessung ihren Höhepunkt, zugleich aber auch ihren Abschluß. Auf dem Weg, den die griechischen Mathematiker Bryson, Antiphon und Archimedes eingeschlagen haben, schritten zwei Jahrtausende hindurch die Mathematiker fort und erzielten dabei immer glänzendere Ergebnisse. Das Verhältnis zwischen Kreisumfang und Durchmesser ist schon im 17. Jahrhundert mit einer Genauigkeit ermittelt, die alle Ansprüche befriedigen muß. Manche der Männer, denen wir im Lauf unserer Betrachtungen begegnet sind, waren von der Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises überzeugt; sie waren jedoch nicht imstande, dies beweisen zu können. Erst im 19. Jahrhundert war, wie wir sehen werden, die mathematische Wissenschaft auf einer solchen Höhe angelangt, daß dieser Beweis geliefert werden konnte.

DRITTES KAPITEL

DER ARITHMETISCH-TRIGONOMETRISCHE ZEITRAUM

§ 9. Der Einfluß der Differential- und Integralrechnung

In dem nun folgenden Zeitraum der Geschichte der Kreisquadratur sind die Bestrebungen der Mathematiker darauf gerichtet, analytische Ausdrücke zu gewinnen, welche durch eine unendliche Reihe von Operationen gebildet werden

und die in geschlossener Form den Wert des Bogens als Funktion des Radius und des Zentriwinkels angeben. Die von Cusanus und Snellius unternommenen Versuche dieser Art haben wir bereits erwähnt. Die Ableitung von Ausdrücken für beliebig große Bögen war erst ermöglicht, seit *Newton* (1643–1727) und *Leibniz* (1646–1716) unabhängig voneinander die *Infinitesimalrechnung* schufen[1]) auf Grund der Vorarbeiten von *Gregorius von St. Vincentius*, *Kepler* (1571–1630), *Cavalieri* (1591–1647), *Fermat* (1601 bis 1663), *Tacquet* (1612–1660) und von *John Wallis* (1616–1703).

Während Newton den Quotienten zweier verschwindender oder entstehender unendlich kleiner Größen klar und deutlich als Grenzwert auffaßte, hat Leibniz 1675 die heute noch übliche Bezeichnung $\int$ und dx für die Rechenvorgänge des Integrierens und Differenzierens geschaffen. Über die Priorität der Erfindung dieser neuen Rechenweise entstand zwischen Leibniz und Newtons Freunden ein erbitterter, von persönlicher Gehässigkeit und parteiischer Leidenschaftlichkeit nicht freier Streit, indem die englischen Mathematiker eben ihrem Lande das Vorrecht der Erfindung erhalten wollten, und wobei sich Newton selbst und zwar ohne Namensnennung an der Abfassung einzelner Anklageschriften gegen Leibniz beteiligte. Erst das vergangene Jahrhundert hat auch von englischer Seite die Anerkennung der Leibnizschen Entdeckung gebracht. Weiter ausgebildet wurde die neue Rechenweise, die auch auf die Kreisberechnung umwälzend einwirkte, von den Brüdern *Bernoulli* und von *Euler*.

Die Darstellung von π durch analytische Ausdrücke, die durch eine unendliche Reihe von Operationen gebildet werden, *ist nur möglich durch unendliche Reihen oder durch unendliche Produkte*, die ja (durch Logarithmierung) leicht in unendliche Reihen umgewandelt werden können.

Das von Vieta aufgefundene unendliche Produkt

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

1) Vgl. Bd. 9 dieser Sammlung: *Witting,* Einführung in die Infinitesimalrechnung.

ist, wie wir bereits gesehen haben, die erste genaue analytische Darstellung für π.

Auf ein weiteres unendliches Produkt für denselben Wert $\frac{2}{\pi}$ ist *Wallis* bei Integrationsbetrachtungen gestoßen; er fand 1655

$$\frac{4}{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \ldots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \ldots}.$$

Dieser Ausdruck hat gegenüber dem von Vieta aufgestellten den Vorzug, daß er zu seiner Ausmittlung nur rationale Operationen verlangt. Zur Berechnung von π ist dieser Ausdruck übrigens wenig geeignet. Wallis hat außerdem vermutet, daß eine genaue Kreisquadratur mit Zirkel und Lineal unmöglich sei und diesen Gedanken auch ausgesprochen, ja sogar bemerkt, daß $\frac{4}{\pi}$ nicht durch Wurzeln darstellbar sei, wenn er es auch nicht beweisen konnte. Ferner hat Wallis einen Beweis für die Konvergenz seines Ausdrucks geliefert, was Vieta, wie wir wissen, versäumte.

Lord Brouncker (1620–1684) brachte das ihm von seinem Freunde Wallis mitgeteilte merkwürdige Ergebnis auf nicht mehr bekannte Weise in die Form eines *unendlichen Kettenbruchs*

$$\frac{4}{\pi} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ddots}}}}$$

Newton hatte sich seit 1666 mit Untersuchungen über *unendliche Reihen* beschäftigt und 1669 eine Abhandlung hierüber seinem Lehrer *Barrow* (1630–1677) vorgelegt, der sie durch Vermittlung von *Collins* (1625–1684) an Brouncker weitergab. Newton stellte darin, um nur einiges zu erwähnen, den binomischen Satz in allgemeinster Form mit gebrochenen Exponenten auf; er fand das Umkehrungsprinzip einer Potenzreihe und dadurch aus der schon früher bekannten Reihe für

$$\log \text{nat}\,(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

die *Exponentialreihe*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

oder

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots (-\infty < x < \infty),$$

die *Sinusreihe*[1])

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots (-\infty < x < \infty),$$

die *Cosinusreihe*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots (-\infty < x < \infty),$$

sowie die *arcsin-Reihe*[1])

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$(-1 \leqq x \leqq 1).$$

---

1) Hier und in den folgenden Reihen ist der Winkel x stets in analytischem Maß oder Bogenmaß gegeben, wie dies in der höheren Mathematik allgemein üblich ist. x ist der Bogen, der im Kreis vom Halbmesser 1 dem Zentriwinkel α entspricht, so daß stets die Proportion gilt

$$\alpha^0 : 360^0 = x : 2\pi,$$

also

$$\alpha^0 = \frac{x\cdot 360^0}{2\pi} = x\cdot\frac{180^0}{\pi}\cdot\left(\frac{180^0}{\pi} = 57{,}3^0 = 3437{,}7' = 206265''\right).$$

Es ist also

$$\sin 2\pi = \sin 360^0,\ \sin\pi = \sin 180^0,\ \sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^0,\ \text{usw.}$$

$\arcsin x$ bedeutet den Bogen (arcus) im Kreis vom Radius 1, dessen Sinus gleich x ist; also z. B.

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6};$$

ebenso

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$

denn es ist ja

$$\tan\frac{\pi}{4} = \tan 45^0 = 1.$$

Bei diesen sämtlichen Reihen[1]) fügte er Regeln für die Bildung der Koeffizienten beliebig hoher Ordnung bei und gab auch die Konvergenzbedingungen[2]) an, d. h. die Grenzen, innerhalb deren x sich bewegen darf, damit die Reihe einen endlichen Grenzwert erhält.

Mit Benützung dieser Potenzreihen für $\sin x$ und $\cos x$ stellte Newton eine neue *Näherungsformel*[3]) auf:

$$\frac{x}{\sin x} \approx \frac{14 + \cos x}{9 + 6\cos x}.$$

Aus

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2x - \frac{8x^3}{6} + \frac{32x^5}{120} + \cdots$$

folgt mit Vernachlässigung aller Potenzen von x, die von höherem als dem 5. Grade sind:

$$\sin x \cos x \approx x - \frac{4}{6}x^3 + \frac{16}{120}x^5 \cdot \quad \Big| \; 1$$

Ebenso ist $$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \quad \Big| \; a$$

und $$\cos x \approx 1 - \frac{3x^2}{6} + \frac{5x^4}{120} \cdot \quad \Big| \; bx$$

Um hieraus x^3 und x^5 zu eliminieren, multiplizieren wir die drei Gleichungen mit den Größen 1, a, bx und erhalten durch Addition

$$\sin x \cos x + a \sin x + bx \cos x$$
$$\approx x(1 + a + b) - \frac{x^3}{6}(4 + a + 3b) + \frac{x^5}{120}(16 + a + 5b).$$

Wir setzen nun

$$4 + a + 3b = 0$$

und

$$16 + a + 5b = 0$$

---

1) Die Herleitung dieser Reihen, die am einfachsten durch die Hilfsmittel der Differentialrechnung geschieht, würde zu weit führen; es sei deshalb auf ein Bändchen dieser Sammlung verwiesen, das sich mit dem Taylorschen Satz und seinen Anwendungen befassen wird.

2) Der Name „Konvergenz" rührt von *James Gregory* her.

3) Wie kann man hieraus die Cusanische Formel bekommen? (Vernachlässigung der Glieder von höherem als dem 3. Grad.)

und erhalten hieraus

$$a = 14,\ b = -6,$$

womit sich als gesuchte Näherungsformel ergibt

$$\sin x \cos x + 14 \sin x - 6x \cos x \approx 9$$

oder

$$\frac{x}{\sin x} \approx \frac{14 + \cos x}{9 + 6 \cos x}.$$

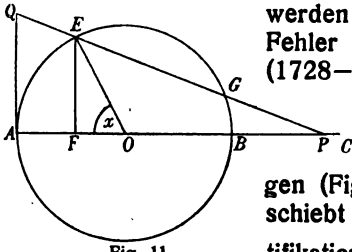


Fig. 11.

Auch diese Formel kann zur Berechnung von π verwendet werden; sie ergibt für $x = 45^0$ einen Fehler von höchstens 20′. *Lambert* (1728–1777) hat aus der Newtonschen Formel folgende **Näherungsrektifikation** hergeleitet: Ist AE der zu rektifizierende Bogen (Fig. 11) und $BC = OB$, so verschiebt man den (Snelliusschen) Rektifikationspunkt C um $\frac{AF}{5}$ nach dem Mittelpunkt des Kreises hin bis P. Zieht man PE, so ist $AQ \approx x$. Wird $\sphericalangle EOA = x$ und der Kreisradius $= 1$ gesetzt, dann ergibt sich aus der Proportion

$$AQ : EF = PA : PF$$

$$AQ : \sin x = \left[3 - \frac{1}{5}(1 - \cos x)\right] : \left[3 - \frac{6}{5}(1 - \cos x)\right],$$

folglich

$$\frac{AQ}{\sin x} = \frac{14 + \cos x}{9 + 6 \cos x} \approx \frac{x}{\sin x},$$

d. h.

$$AQ \approx x.$$

§ 10. Berechnung von π durch unendliche Reihen.

Durch die Vermittlung von Collins erfuhr *James Gregory* (1638–1735) von Newtons Ergebnissen; nach vielen vergeblichen Anstrengungen fand er 1670 die *arctan-Reihe*, die in unserer heutigen Schreibweise die Form hat:

$$(1) \qquad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots (-1 \leq x \leq 1).$$

Diese Reihe stellt den zu einer gegebenen trigonometrischen Tangente x gehörigen Bogen $\arctan x$ dar, durch den Radius gemessen. In der Schreibweise von Gregory lautete die Reihe, wenn r die Länge des Radius OA, a einen Bogen AB und t die Länge der Tangente zwischen dem Berührungspunkt A und dem Radius OB bezeichnet:

$$a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + - \cdots$$

Da $\tan 45^0 = 1$ oder im Bogenmaß $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, so ist

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Man erhält also, wenn in der arctan-Reihe $x = 1$ gesetzt wird, die zuerst von *Leibniz* 1673 unabhängig von Gregory und durchaus selbständig gefundene und deshalb mit Recht nach ihm benannte Reihe für $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots \tag{2}$$

Für die praktische Berechnung der Zahl π ist diese Reihe wegen ihrer überaus langsamen Konvergenz durchaus ungeeignet. Um π nur auf 2 Dezimalen genau zu bekommen, braucht man etwa 300 Glieder[1]); zur Berechnung von 20 Dezimalstellen sind nach Newton 5.10^9 Glieder nötig, während die uns bereits bekannte arcsin-Reihe

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots \tag{3}$$

für $x = \frac{1}{2}$, also $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ die wesentlich stärker konvergierende und daher rascher zum Ziel führende Reihe gibt

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7} + \cdots. \tag{4}$$

---

1) *De Lagny* (1660–1734, Paris), der die arctan-Reihe unabhängig von Gregory und Leibniz nochmals 1682 entdeckte, schreibt: „Il faut plus de trois cents opérations et presque un livre entier, pour trouver seulement le rapport de 314 à 100."

Diese Reihe liefert schon mit etwa 30 Gliedern 20 Dezimalstellen. Newton berechnete aus ihr π auf 14 Stellen.

Setzt man in der arctan-Reihe $x = \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, so wird arctan $x = \frac{\pi}{6}$ und man erhält eine zur Berechnung von π noch geeignetere Reihe

$$(5) \quad \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \frac{1}{3^4 \cdot 9} - \cdots\right).$$

Aus dieser Reihe berechnete der englische Astronom *Abraham Sharp* (1651—1742) nach der Anweisung des bekannten Astronomen *Halley* um 1700 die Zahl π auf 72 Dezimalen; 1719 veröffentlichte *de Lagny* 127 Dezimalen, deren Berechnung nach der Ansicht von Euler, der doch als Sachverständiger gelten darf, eine „unglaubliche Mühe" verursacht haben mußten.

Ein Vergleich der arcsin-Reihe mit der arctan-Reihe zeigt, daß sich die letztere Reihe ihrer einfacheren Zahlenkoeffizienten wegen zur Berechnung von π viel besser eignet. Es handelt sich nur darum, die arctan-Reihe derart umzuformen, daß wenige Glieder genügen, um für π eine verhältnismäßig große Zahl von richtigen Stellen zu bekommen.

Als besonders vorteilhaft haben sich zu diesem Zweck die Relationen erwiesen, die man als *Additionstheoreme der arctan-Funktion* bezeichnet. Aus

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

folgt mit $\tan\alpha = u$ und $\tan\beta = v$, woraus $\alpha = \arctan u$, $\beta = \arctan v$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{u + v}{1 - uv} = \tan(\arctan u + \arctan v),$$

also

$$(*) \qquad \arctan u + \arctan v = \arctan \frac{u + v}{1 - uv}.$$

Diese Gleichung stellt das **Additionstheorem der arctan-Funktion** dar.

Bestimmt man nun u und v als echte Brüche so, daß

$$(**) \qquad \frac{u+v}{1-uv} = 1$$

wird, so ist, da $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$,

$$\frac{\pi}{4} = \arctan u + \arctan v$$

$$= \left(u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \cdots\right) + \left(v - \frac{v^3}{3} + \frac{v^5}{5} - \frac{v^7}{7} + \cdots\right).$$

Zur Bestimmung von u als Funktion von v benützen wir die Gleichung (**). Aus ihr folgt

$$u + v = 1 - uv$$

oder

$$u = \frac{1-v}{1+v}.$$

Hieraus kann zu jedem Wert von v der entsprechende Wert von u berechnet werden. Je kleiner die Brüche u und v sind, desto rascher konvergiert die Reihe. Setzt man z. B. $v = \frac{1}{2}$, so wird $u = \frac{1}{3}$ und wir erhalten die Eulersche Formel

$$(6) \quad \frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + - \cdots\right)$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + - \cdots\right).$$

Aus dieser Reihe lassen sich durch wiederholte Anwendung der Formel (*) noch weitere ähnliche Formeln herstellen. Setzen wir, um für $\arctan\frac{1}{2}$ rascher konvergierende Reihen zu erhalten, $\frac{u+v}{1-uv} = \frac{1}{2}$, so erhalten wir z. B. aus $u = \frac{1}{3}$ für v den Wert $v = \frac{1}{7}$, so daß

$$\arctan\frac{1}{2} = \arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}.$$

Damit geht (6) über in

$$\frac{\pi}{4} = 2 \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}. \tag{7}$$

Da ferner

$$\arctan \frac{1}{3} = \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8},$$

so ergibt sich damit aus (6)

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} \tag{8}$$

und aus (7)

$$\frac{\pi}{4} = 2 \arctan \frac{1}{5} + 2 \arctan \frac{1}{7} + \arctan \frac{1}{8}.$$

Wir fügen noch ohne Beweis zwei von *Gauß* angegebene Formeln bei; die sich gut zur Berechnung von π eignen:

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{18} + 8 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239},$$

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{38} + 20 \arctan \frac{1}{57} + 7 \arctan \frac{1}{239} + 24 \arctan \frac{1}{268}.$$

Euler, dem man eine große Anzahl von Reihenentwickelungen für π verdankt[1]), stellte die Formel auf

$$\frac{\pi}{4} = 5 \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{3}{79} \tag{9}$$

und benützte zur Berechnung der arctan-Reihen die ebenfalls von ihm aufgestellte Reihe

$$\arctan t = \frac{t}{1+t^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^3 + \cdots\right\}. \tag{10}$$

Mit Hilfe dieser letzten Reihe ergibt sich zur Berechnung von $\frac{\pi}{4}$ eine sehr bequeme Reihe. Mit $t = \frac{1}{7}$ wird $\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1}{50} = \frac{2}{100}$; $t = \frac{3}{79}$ liefert $\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{9}{6250} = \frac{144}{100\,000}$. Damit hat man die Reihe

1) Vgl. Lit. Verz. Nr. 11.

$$(11)\ \frac{\pi}{4} = \frac{28}{10}\left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\left(\frac{2}{100}\right)^3 + \cdots\right\}$$
$$+ \frac{30\,366}{100\,000}\left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{144}{100\,000}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\left(\frac{144}{100\,000}\right)^2 + \cdots\right\}.$$

Mit ihrer Hilfe berechnete Euler nach seiner Angabe in einer Stunde π auf 20 Dezimalen.

Zur wirklichen numerischen Berechnung von π, die der Leser wohl erwarten wird, benützen wir die von *Machin* 1706 aufgestellte Formel

$$(12)\qquad \frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239},$$

der mit ihrer Hilfe die Zahl π auf 100 Dezimalen berechnete. Diese Formel ist für die numerische Berechnung sehr geeignet; in der ersten Reihe ist der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder $\frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$ und die zweite Reihe konvergiert außerordentlich rasch.

Zur Herleitung dieser Formel verfährt Machin folgendermaßen. Ist $a = \tan\alpha$ ein rationaler Bruch, dann sind auch $\tan 2\alpha$, $\tan 3\alpha$, ... $\tan n\alpha$ rationale Brüche. Man wählt nun die Zahl n so, daß $\tan n\alpha$ der Einheit möglichst nahekommt. Setzen wir fest, daß $n\alpha > \frac{\pi}{4}$, also $\tan n\alpha = b > 1$ wird, dann ist

$$\tan\left(n\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\tan n\alpha - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan n\alpha\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\tan n\alpha - 1}{1 + \tan n\alpha} = \frac{b-1}{1+b} = c$$

ebenfalls ein rationaler Bruch. Damit wird

$$n\alpha - \frac{\pi}{4} = \arctan c \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{4} = n.\ \arctan a - \arctan c.$$

Mit $a = \tan\alpha = \frac{1}{5}$, also $\alpha = \arctan\frac{1}{5}$ erhält man

$$\tan 2\alpha = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5^2}} = \frac{5}{12}.$$

Nach unserer Festsetzung soll aber $\tan 2\alpha > 1$ werden und gleichzeitig der Einheit möglichst nahekommen; dies ist der Fall für $n = 4$. Damit wird

$$\tan 4\alpha = \frac{\frac{5}{12} + \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}.$$

Dieser Wert entspricht vollkommen unseren Wünschen. Hiemit kommt

$$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239},$$

also

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{239},$$

oder

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\alpha - \arctan\frac{1}{239},$$

oder, da $\alpha = \arctan\frac{1}{5}$,

$$(12). \qquad \frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.$$

Um aus der ersten Reihe $4\arctan\frac{1}{5}$ eine rascher konvergierende Reihe zu erhalten, hat *Buzengeiger* (1771–1835) sie in folgender Weise umgeformt. Aus $\tan\alpha' = \frac{1}{10}$ folgt

$$\tan 2\alpha' = \tan 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{2 \cdot \frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{20}{99},$$

also

$$\tan(2\alpha' - \alpha) = \frac{\frac{20}{99} - \frac{1}{5}}{1 + \frac{20}{99} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{1}{515},$$

woraus

$$\alpha = 2\alpha' - \arctan\frac{1}{515} = 2\arctan\frac{1}{10} - \arctan\frac{1}{515} = \arctan\frac{1}{5}.$$

Setzt man diesen Wert in (12) ein, so ergibt als gesuchte, von Buzengeiger zuerst angegebene, Formel:

$$(13)\qquad \frac{\pi}{4} = 8\arctan\frac{1}{10} - 4\arctan\frac{1}{515} - \arctan\frac{1}{239}.$$

Setzen wir

$$\frac{\pi}{4} = 8A - 4B - C,$$

also

$$A = \operatorname{arc\,tan}\frac{1}{10},\quad B = \operatorname{arc\,tan}\frac{1}{515},\quad C = \operatorname{arc\,tan}\frac{1}{230},$$

so genügen bei der ersten Reihe 4 Glieder, bei den beiden anderen je 2 Glieder, um π auf 7 Dezimalen genau zu berechnen, wie die folgende Zusammenstellung zeigt:

$$\frac{1}{10} = 0{,}100\ 000\ 000$$
$$\frac{1}{5\cdot 10^5} = 0{,}000\ 002\ 000$$
$$-\frac{1}{3\cdot 10^3} = 0{,}000\ 333\ 333$$
$$-\frac{1}{7\cdot 10^7} = 0{,}000\ 000\ 014$$
$$A = 0{,}099\ 668\ 653$$

$$\frac{1}{515} = 0{,}001\ 941\ 747$$
$$-\frac{1}{3\cdot 515^3} = 0{,}000\ 000\ 002$$
$$B = 0{,}001\ 941\ 745$$
$$\frac{1}{239} = 0{,}004\ 184\ 100$$
$$-\frac{1}{3\cdot 239^3} = -0{,}000\,000\,024$$
$$C = 0{,}004\ 184\ 076.$$

Damit wird

$$\frac{\pi}{4} \approx 8A - 4B - C = 0{,}785\ 398\ 168,$$

also

$$\pi \approx 3{,}141592672.$$

Der Wert für A ist um höchstens 2 Einheiten zu groß, B und C je um eine Einheit, also $8A - 4B - C$ um höchstens 21 Einheiten, das 4fache um höchstens 84 Einheiten, d. h. der gesuchte Wert für π liegt zwischen 3,141592672 und 3,141592588: der von uns gefundene Wert ist also auf 7 Dezimalen richtig.

Nach der Formel (7) berechnete *Vega* (1756–1802) 140

Stellen, durch welche die 127 Stellen Lagnys, abgesehen von der 113., bestätigt wurden. *William Rutherford* erhöhte die Stellenzahl auf 208 (davon 152 richtige) aus

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{70} + \arctan \frac{1}{99}.$$

Der Hamburger Rechenkünstler *Zacharias Dahse* fand nach der Formel (8), die ihm von dem Wiener Mathematiker *v. Schulz* 1844 angegeben wurde, in kaum 2 Monaten π auf 200 Dezimalen. *Rutherford* gab 1853 440 Stellen, Professor *Richter* in Elbing veröffentlichte 1855 500 Stellen, der englische Mathematiker *W. Shanks* 1874 sogar 707 Stellen auf Grund der Machinschen Formel. Einen praktischen Wert haben diese Berechnungen auf so viele Dezimalstellen nicht; sie zeigen nur, in welch hervorragender Weise die neueren Rechnungsmethoden denen aus älterer Zeit überlegen sind. Ist z. B. π auf nur 25 Dezimalen richtig, so könnte damit der Umfang eines Kreises, dessen Radius gleich dem Abstand des Mittelpunkts der Erde von dem uns nächsten Fixstern ist, auf $\frac{1}{1\,000\,000}$ mm genau berechnet werden. Welche Genauigkeit schon in 100 Stellen liegt, vermag sich der menschliche Geist überhaupt nicht vorzustellen.

Für die ersten 30 Dezimalen besitzen die Franzosen einen **Merkvers**, der, ebenso wie die nicht gerade lyrisch anmutende deutsche Übersetzung, durch die Zahl der Buchstaben der aufeinanderfolgenden Worte der Reihe nach die Dezimalstellen der Zahl π liefert:

3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5
Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
8 9 7 9
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
3 2 3 8 4 6 2 6
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
4 3 3 8 3 2 7 9
Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.

In deutscher Übersetzung:

Dir, o Held, o alter Philosoph, du Riesen-Genie!
Wie viele Tausende bewundern Geister,

Himmlisch wie du und göttlich! –
Noch reiner in Äonen
Wird das uns strahlen,
Wie im lichten Morgenrot!

Wir fügen noch den Wert von π auf 40 Dezimalen bei:

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ldots$$

Ehe wir diesen Abschnitt der analytischen Ausmittlung des Wertes von π abbrechen, wollen wir noch einer **Wahrscheinlichkeitsmethode** gedenken, die um die Mitte des vergangenen Jahrhunderts Professor *R. Wolf* in Zürich angewandt hat. Ein Fußboden sei nach Art des Schachbretts in lauter gleich große quadratische Felder zerlegt. Wird eine Nadel, die so lang ist wie die Seite jedes quadratischen Feldes, wahllos auf diesen Fußboden geworfen, so wird sie zuweilen ganz innerhalb eines Feldes zu liegen kommen, ohne irgendeine der Parallelen zu schneiden, welche das quadratische Netz bilden. Die Wahrscheinlichkeit, daß dies zutrifft, berechnet sich auf $\pi - 3$. Wiederholt man den Versuch genügend oft, so ergibt sich ein Näherungswert für π. Nach 10000 Versuchen erhielt Wolf π auf 3 Dezimalstellen richtig.

§ 11. Unendliche Produkte für π

Da $\sin x$ verschwindet für $x = 0$, $x = \pm\pi$, $x = \pm 2\pi$, $x = \pm 3\pi\ldots$. und nur für diese Werte, so hat $\sin x$ die Faktoren x, $x^2 - \pi^2$, $x^2 - (2\pi)^2$, $x^2 - (3\pi)^2, \ldots$; man kann also setzen

$$(1)\quad \sin x = ax\,(x^2 - \pi^2)\,(x^2 - (2\pi)^2)\,(x^2 - (3\pi)^2)\ldots,$$

wo a eine Konstante ist. Hieraus kommt

$$(2)\quad \frac{\sin x}{x} = a\,(x^2 - \pi^2)\,(x^2 - (2\pi)^2)\,(x^2 - (3\pi)^2)\ldots$$

Aus der Reihe

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots$$

folgt

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + - \cdots,$$

woraus mit $x = 0$

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Aus (2) ergibt sich also für $x = 0$

(3) $$1 = a\,(-\pi^2)\,(-(2\pi)^2)\,(-(3\pi)^2)\ldots$$

Durch Division von (2) und (3) erhält man das unendliche Produkt für $\sin x$:

(4) $$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\cdots$$

Mit $x = \frac{\pi}{2}$ kommt hieraus das uns bereits bekannte *unendliche Produkt von Wallis:*

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{35}{36} \cdot \frac{63}{64} \cdots$$

oder

(5) $$\frac{\pi}{2} = \frac{4 \cdot 16 \cdot 36 \cdot 64 \cdots}{3 \cdot 15 \cdot 35 \cdot 63 \cdots} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots}.$$

Setzt man in (4) $x = \frac{\pi}{4}$, so erhält man, weil $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, das weitere unendliche Produkt

(6) $$\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 16 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdots}.$$

Mit $x = \frac{\pi}{6}$ ergibt sich aus (4), da $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, ebenfalls ein unendliches Produkt:

(10) $$\frac{\pi}{2} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 18 \cdots}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdots}.$$

Diese beiden letzteren Produkte sind zuerst von *Euler* aufgestellt worden.

§ 12. Die Japaner und Chinesen

Neuere Untersuchungen haben dargetan, daß japanische Mathematiker sich schon frühzeitig mit der Herleitung möglichst

genauer Näherungswerte für π befaßten. Es ist ziemlich sicher, daß hierbei abendländische Beeinflussungen nicht vorhanden waren, was bei den Verkehrsmöglichkeiten früherer Jahrhunderte und den sprachlichen Schwierigkeiten, die sich einer Benützung fremder Quellen damals entgegenstellten, als durchaus begreiflich erscheint. Im Jahre 1627 findet sich in einem mathematischen Werk von *Mitsuyoshi Yoshida* für π der Näherungswert $\frac{79}{25} = 3{,}16$. Aus dem regelmäßigen 2^{15}-Eck wurde 1664 der Wert für π auf 7 Dezimalen genau berechnet. Japans berühmtester Mathematiker *Kowa Seki* († 1708) berechnete aus der Reihe für $\arcsin x$ den Wert der Zahl π auf 24 Dezimalen; *Yoshihide Masunaga* erhöhte 1739 deren Kenntnis mittels derselben Reihe auf 50 Stellen. Rationale Näherungswerte für π gab *Arima* 1766 an, nämlich $\pi \approx \frac{5\,419\,351}{1\,725\,033}$ (auf 12 Stellen richtig) und $\pi \approx \frac{428\,224\,593\,349\,304}{136\,308\,121\,570\,117}$ (auf 30 Stellen richtig); für π^2 stellte *Kurushima* († 1760) den Näherungswert auf $\pi^2 \approx \frac{98\,548}{9985}$.

Wie wir schon auf S. 32 Anm. 1 gesehen haben, haben auch chinesische Mathematiker sich mit der Kreisquadratur beschäftigt. Durch Berechnung der Seitenlänge des um- und einbeschriebenen $3 \cdot 2^{34}$-Ecks erhielt *Sun-li Ching-yun* 1713 π auf 19 Dezimalen. Mit Hilfe der schon früher erwähnten Formel $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$ berechnete der in ziemlich jungem Alter 1877 verstorbene *Tsêng-Chi-hung* in etwas mehr als einem Monat π auf 100 Dezimalen. Ob hierbei „westliches Wissen" seinen Einfluß ausübte, vermögen wir nicht zu sagen.

§ 13. Der Buchstabe π

Der ausschließliche Gebrauch des Buchstabens π als Bezeichnung für die Größe des Verhältnisses von Kreisumfang zum Kreisdurchmesser ist jedem, der sich einmal und sei es auch nur als Schüler mit Mathematik befaßt hat, so vertraut, daß man meinen könnte, dieses Verhältnis sei immer so bezeichnet worden. Dem ist aber nicht so. Der Buchstabe π

tritt in seiner gegenwärtigen Bedeutung zum erstenmal bei *William Jones* 1706 auf in dessen Sinopsis palmariorum Mathesos, einer Einleitung in die Mathematik. Es ist wahrscheinlich, daß Jones zur Wahl dieses Buchstabens durch eine abkürzende Bezeichnung veranlaßt wurde, die sich in einem 1631 erschienenen Elementarbuch der Mathematik von dem englischen Landpfarrer *Oughtred* (1574–1660) für den Halbkreis (semiperipheria) findet. Dort steht nämlich die Proportion

$$7 : 22 = \delta : \pi = 133 : 355,$$

wobei δ eine Abkürzung für Halbmesser (semidiameter) bedeutet. Merkwürdigerweise fand der Vorschlag von Jones anfänglich keine Gnade vor den Augen der Fachgelehrten, die meist den Buchstaben *p* benützten. Erst *Euler* wandte von 1737 an durchgängig die neue Bezeichnung an. Infolge seines ausgedehnten Briefwechsels mit anderen Mathematikern und besonders durch seine weit verbreitete Introductio fand das neue Symbol allgemein Eingang in die Mathematik.

§ 14. Näherungskonstruktionen

Aus dem Näherungswert $\pi = 3{,}14159265\ldots$ erhält man durch den bekannten Rechenvorgang der Kettendivision[1]), die z. B. zum Aufsuchen des gemeinsamen Faktors zweier Zahlen dient, den Kettenbruch

$$\pi - 3 = \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292} + \cdots}}}$$

1) So ist z. B. $\dfrac{25}{56} = \dfrac{1}{\frac{56}{25}} = \dfrac{1}{2 + \frac{6}{25}} = \dfrac{1}{2 + \frac{1}{\frac{25}{6}}} = \dfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{6}}}$.

Dieses Ergebnis ergibt sich einfacher aus dem Divisionsschema:

$$\begin{array}{c|c|c|c} 4 & 25 & 56 & 2 \\ \hline & 1 & 6 & 6 \end{array} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{6}}}$$

Die Näherungswerte dieses Kettenbruchs sind $\frac{1}{7}$, $\frac{15}{106}$, $\frac{16}{113}$, $\frac{3072}{21\,697}$. Der vorletzte der so gewonnenen Näherungswerte für π, $3\frac{16}{113}$, ist besonders gut, weil der nächstfolgende Teilnenner 292 sehr groß ist; es ist der uns bekannte Näherungswert des Adrian Anthonisz, genannt Metius. Aus dem ersten Näherungswert $3\frac{1}{7}$ lassen sich noch weitere Näherungswerte folgendermaßen ableiten. Seit Archimedes ist bekannt, daß $\pi < 3\frac{1}{7}$. Nehmen wir nun in den Brüchen $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{14}$, $\frac{3}{21}$, $\frac{4}{28}$, usw. je statt des Nenners die um 1 größere Zahl, so erhalten wir eine neue Reihe von Näherungswerten:

$$\left(\frac{1}{7}\right);\ \frac{1}{8};\ \frac{3}{22};\ \frac{4}{29};\ \frac{5}{36};\ \frac{6}{43};\ \frac{7}{50};\ \frac{8}{57};\ \frac{9}{64};\ \frac{10}{71};\ \frac{11}{78};\ \frac{12}{85};\ \frac{13}{92};\ \frac{14}{99};$$

$$\left(\frac{15}{106}\right);\ \left(\frac{16}{113}\right);\ \frac{17}{120};\ \cdots$$

Von diesen Näherungswerten sind uns bereits bekannt $\frac{1}{7}$ (Archimedes), $\frac{1}{8}$ (Vitruv und Dürer); $\frac{10}{71}$ (Archimedes); $\frac{15}{106}$ (s. oben), $\frac{16}{113}$ (Adrian Anthonisz), $\frac{17}{120}$ (Ptolemäus).

Zwei Werte der Reihe lassen eine einfache **Näherungskonstruktion** zu, deren Ausführung wir dem Leser überlassen. Es ist

$$3\frac{5}{36} = 3{,}139\cdots = 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

und $$3\frac{9}{64} = 3{,}1406\cdots = 3 + \left(\frac{3}{8}\right)^2.$$

Die Konstruktion für den Näherungswert $3\frac{16}{113} = 3 + \frac{4^2}{7^2+8^2}$ ist bereits auf S. 39 angeführt.

Aus der von Euler (1737) abgeleiteten Formel

$$(1) \qquad \frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{16}\cdots,$$

die für $x = \frac{\pi}{2}$ die Vietasche Formel liefert, ergibt sich eine hübsche **Konstruktion** für die **Rektifikation des Kreises** oder **eines Kreisbogens.**

Zum Beweis der Formel (1) schlagen wir folgenden Weg ein. Es ist

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

also

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}. \tag{2}$$

Setzt man in diesem Ausdruck der Reihe nach für x die Werte $\frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{8}, \cdots$ so erhält man

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

$$\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4}}{\frac{x}{4}}$$

$$\frac{\sin \frac{x}{4}}{\frac{x}{4}} = \frac{\sin \frac{x}{8} \cos \frac{x}{8}}{\frac{x}{8}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}{\frac{x}{2^{n-1}}} = \frac{\sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}.$$

Das Produkt dieser n Gleichungen liefert

$$\frac{\sin x}{x} = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}.$$

Nun ist (vgl. Seite 52)

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} = \lim_{\xi=0} \frac{\sin \xi}{\xi} = 1,$$

also erhalten wir für den Ausdruck $\frac{\sin x}{x}$ das unendliche Produkt

$$(1) \qquad \frac{\sin x}{x} = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8} \cdot \cos \frac{x}{16} \cdots$$

Diese Formel liefert eine einfache **Konstruktion**, die zuerst von *Fontana* 1784 angegeben wurde, jedoch bis in die neueste Zeit in nur wenig verschiedenen Formen wiederholt aufgefunden worden ist.

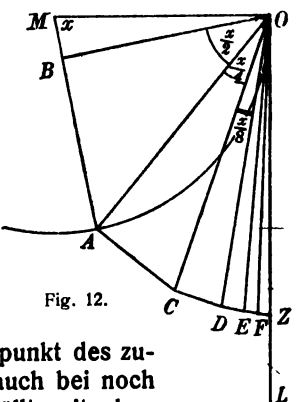


Fig. 12.

Um den Kreisbogen OA (Mittelpunkt M) zu rektifizieren (Fig. 12), errichtet man in O auf OM das Lot OL und zieht OA. Halbiert man den Winkel AOL durch OC, $\sphericalangle COL$ durch OD usw. und ist $AC \perp OA$, $CD \perp OC$, $DE \perp OD$ usf., so erhält man schon nach wenigen Halbierungen einen Punkt Z als Schnittpunkt des zuletzt errichteten Lots mit OL, der auch bei noch so genauer Zeichnung zusammenfällt mit dem Schnittpunkt von OL mit dem Kreisbogen, der um O beschrieben wird mit einem Radius gleich der Länge der zuletzt konstruierten Winkelhalbierenden.

Soll der Halbkreis rektifiziert werden, so ist $x = \pi$, also $\sin x = 0$, $\cos \frac{x}{2} = 0$: die Formel (1) liefert also keine Konstruktion. Man rektifiziert daher den Viertelkreis. Dessen Umfang (Bogen x) ist $\frac{\pi}{2}$, der dazu gehörige Zentriwinkel $x = 90^0$. Damit erhalten wir aus (1) die uns schon bekannte Formel (s. S. 31)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\cos \frac{90^0}{2} \cdot \cos \frac{90^0}{4} \cdot \cos \frac{90^0}{8} \cdots}.$$

Die Richtigkeit unserer Konstruktion ergibt sich aus folgender Betrachtung. Setzen wir $OM = r = 1$ und ist

$$\sphericalangle OMB = x,$$

so ist $\sphericalangle AOL = \sphericalangle AOB = \frac{x}{2}$; ferner $\sphericalangle AOC = \frac{x}{4}$, $COD = \frac{x}{8}$, usf. Im rechtwinkligen ΔAOB ist $OA = \frac{OB}{\cos\frac{x}{2}}$, woraus mit $OB = \sin x$ sich ergibt

$$OA = \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}},$$

also

$$OC = \frac{OA}{\cos\frac{x}{4}} = \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}},$$

$$OD = \frac{OC}{\cos\frac{x}{8}} = \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}} \text{ usw.},$$

so daß schließlich

$$OZ = \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{16}\cdots} = x.$$

Eine große Anzahl von **Näherungskonstruktionen** stammt aus neuerer Zeit. Wir beschränken uns auf eine Auslese, indem wir auf die sehr reichhaltigen Literaturangaben bei *Max Simon* (s. Lit. Verz. Nr. 5) hinweisen. Die älteste und zugleich eine der genauesten ist die von *Adam Kochansky*, Mathematiker des Königs von Polen, aus dem Jahre 1685. Sie hat den Vorzug, daß man mit einer Zirkelöffnung auskommt. An den Kreis vom Halbmesser $AC = 1$ wird im Punkt B die Tangente gezogen (Fig. 13). Errichtet man über $BF = BC$ das Mittellot CG, welches die Tangente

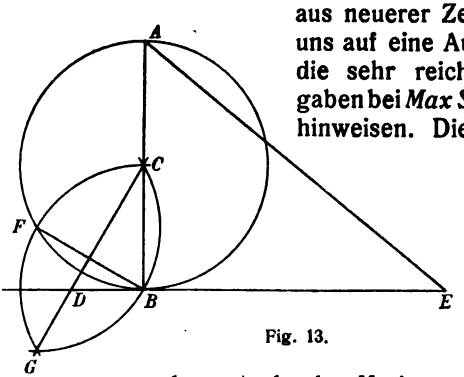


Fig. 13.

in D schneidet, und macht man $DE = 3BC$, so ist AE annäherungsweise gleich dem halben Kreisumfang.

Es ist

$$AC = CB = BF = 1,$$

also

$$BD = \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

folglich

$$AE^2 = AB^2 + (BE)^2 = 4 + \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{40}{3} - 2\sqrt{3}$$

$$= 13{,}333333\ldots - 3{,}4641016\ldots = 9{,}8692317\ldots,$$

also wird durch

$$AE = \sqrt{9{,}8692317\ldots} = 3{,}141533\ldots$$

der Wert von π auf 4 Dezimalen genau dargestellt. Der Fehler beträgt etwa 0,008, also etwa $\frac{1}{1000}$ des Kreisradius.

Diese Näherungskonstruktion wurde wiederholt als neu ausgegeben, so 1797 von *Lorenzo Mascheroni* u. a.

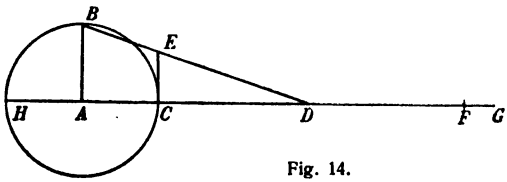


Fig. 14.

Von dem Bildhauer *Pioche* in Metz stammt folgende 1818 veröffentlichte Näherungskonstruktion (Fig. 14):

A sei der Mittelpunkt des gegebenen Kreises mit Radius $AC = r$. Ziehe $BA \perp AC$, verlängere AC um $CD = 2r$. Ziehe $CE \parallel AB$. Mache

$$DF = DE,\ FG = \frac{3}{8}r \text{ und } AH = \frac{4}{5}r,$$

so ist

$$2\pi r \approx HG = 2r \cdot \frac{501 + 80\sqrt{10}}{240} = 3{,}14159255\ldots$$

(auf 6 Dezimalen genau). Es ist nämlich

$$HG = HA + AD + DF + FG = r\left(\frac{4}{5} + 3 + DF + \frac{3}{8}\right),$$

da

$$DF = ED = \sqrt{4 + \frac{4}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{10},$$

so wird

$$HG = \frac{501 + 80\sqrt{10}}{120}.$$

Die Konstruktion von *C. G. Specht*, 1828 veröffentlicht,

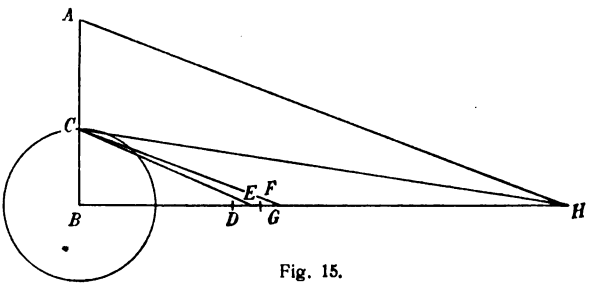


Fig. 15.

lautet (Fig. 15): Auf dem Radius $BC = r$ wird das Lot $BD = 2r$ errichtet; $DE = EF = FG = \frac{1}{5}r$ und $BA = CE$ gemacht, und durch A die Parallele AH zu CG gezogen, dann ist $BH \approx 2\pi r$ und der Inhalt des ΔBCH ist $\approx \pi r^2$. Es ist $BH = \frac{13}{25}\sqrt{146} \approx 2\pi r$, woraus $\pi \approx 3{,}14159195\ldots$; der Fehler beträgt $\frac{7}{10000000}2r$; er ist also kleiner als $\frac{1}{7}$ mm bei 100 m Kreisdurchmesser.

Wir fügen noch eine Reihe von Formeln an, die Näherungskonstruktionen von π liefern, deren geometrische Ausführung wir teilweise dem Leser überlassen. Es ist

$$\pi \approx \sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}1463\ldots$$

($\sqrt{2}$ ist Seite des einbeschriebenen Quadrats, $\sqrt{3}$ die des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks),

$$\pi \approx \sqrt{51} - 4 = 3{,}14141\ldots,$$

$$\frac{\pi}{4} \approx \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)} = 0{,}7861\ldots \text{ (statt } 0{,}78539\ldots);$$

$\left(\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\right.$ ist die Zehnecksseite$\left.\right)\cdot$

$$\pi \approx 3 + \frac{1}{10}\sqrt{2} = 3{,}14142\ldots,$$

$$\pi \approx 0{,}6\,(3+\sqrt{5}) = 3{,}14164\ldots,$$

$$\frac{\pi}{2} \approx 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} = 1{,}5773\ldots \text{ (statt } 1{,}5707\ldots).$$

VIERTES KAPITEL

DER ALGEBRAISCHE ZEITRAUM

§ 15. Beweis der Irrationalität von π

Bricht man den Kettenbruch

$$x = a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \cdots}}}$$

der Reihe nach beim 2., 3., 4., ... Partialnenner a_2, a_3, a_4, ... ab, so erhält man Näherungswerte des Kettenbruchs, die wir mit $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \frac{p_4}{q_4}, \cdots$ bezeichnen wollen. Dabei ist, wie man leicht durch Ausrechnen bestätigen kann

$$p_1 \equiv a_1;$$

$$p_2 \equiv a_1 b_2 + b_1;$$

$$p_3 \equiv a_1 a_2 a_3 + a_3 b_1 + a_1 b_2 = (a_1 a_2 + b_1) a_3 + a_1 b_2;$$

$$p_4 \equiv a_1 a_2 a_3 a_4 + a_3 b_1 a_4 + a_1 b_2 a_4 + a_1 a_2 b_3 + b_1 b_3$$
$$= (a_1 a_2 a_3 + a_3 b_1 + a_1 b_2) a_4 + a_1 a_2 b_3 + b_1 b_3$$
$$= p_3 a_4 + a_1 a_2 b_3 + b_1 b_3;$$

. . . . . .

$$q_1 \equiv 1;$$

$$q_2 \equiv a_2;$$

$$q_3 \equiv a_2 a_3 + b_2 = q_2 a_3 + b_2;$$

$$q_4 \equiv a_2 a_3 a_4 + a_4 b_2 + b_3 = (a_2 a_3 + b_2) a_4 + b_3$$
$$= q_3 a_4 + b_3;$$
. . . . . .

Wie man sieht, ist der erste Näherungswert $a_1 < x$, der der zweite $> x$, der dritte $< x$ usf. Bildet man die Differenzen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Näherungswerten

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{b_1}{a_2}; \quad \frac{p_2}{q_2} - \frac{p_3}{q_3} = \frac{b_1 b_2}{a_2 (a_2 a_3 + b_2)};$$

$$\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{b_1 b_2 b_3}{(a_2 a_3 + b_2)(a_2 a_3 a_4 + a_4 b_2 + a_2 b_3)};$$ usw.,

so läßt sich nach dem oben Gesagten der Wert des Kettenbruchs durch die unendliche Reihe darstellen:

$$(1) \qquad x = a_1 + \frac{b_1}{a_2} - \frac{b_1 b_2}{a_2 (a_2 a_3 + b_2)}$$
$$+ \frac{b_1 b_2 b_3}{(a_2 a_3 + b_2)(a_2 a_3 a_4 + a_2 b_2 + a_2 b_3)} - + \cdots$$

Bricht der Kettenbruch mit einer endlichen Zahl von Nennern ab, so liefert (1) eine endliche Reihe; hat dagegen der Kettenbruch eine unendlich große Anzahl von Gliedern, so erhalten wir eine unendliche Reihe.

Mittels unserer bisherigen Darlegung können wir aber auch umgekehrt jede unendliche Reihe von der Form

$$(2) \qquad x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} + - \cdots$$

in einen Kettenbruch verwandeln. Die gliedweise Vergleichung von (1) und (2) liefert

$$b_1 = b_2 = b_3 = \cdots 1; \; a_1 = 0; \; a_2 = A; \; A(A a_3 + 1) = B;$$
$$B(B a_4 + 1) = C; \text{ usf.}$$

Hieraus folgt

$$a_2 = A; \; a_3 = \frac{B - A}{A^2}, \; a_4 = \frac{C - B}{B^2}, \text{ usf.}$$

Damit erhält man für die Reihe (2) den Kettenbruch

$$x = \cfrac{1}{A + \cfrac{A^2}{(B-A) + \cfrac{B^2}{(C-B) + \cfrac{C^2}{(D-C) + \ddots}}}} \tag{3}$$

Diese Entwickelung gestattet uns, die uns bekannte *Reihe für* $\frac{\pi}{4}$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots$$

in der Form eines Kettenbruchs zu schreiben. Man erhält nämlich mit

$$A = 1,\ B = 3,\ C = 5,\ D = 7, \ldots$$

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ddots}}}}$$

Hieraus folgt übrigens durch Umkehrung die schon früher erwähnte Formel von Brouncker:

$$\frac{4}{\pi} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ddots}}}}$$

Da der Kettenbruch unendlich viele Glieder hat, so *muß* $\frac{\pi}{4}$ *eine irrationale Größe* sein. Wäre $\frac{\pi}{4}$ nicht irrational, so müßte der Kettenbruch bei irgendeinem Glied abbrechen.

Lambert hat ferner bewiesen, daß der Kettenbruch

$$\tan\frac{m}{n} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cfrac{m^2}{5n - \cfrac{m^2}{7n - \ddots}}}}$$

irrational ist. Setzt man hierin $m = x$ und $n = 1$, so wird

$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ddots}}}}$$

Mit $x = \pi$ bekommt man nach dem Vorgang von *Legendre* (1752—1833)

$$0 = \cfrac{\pi}{1 - \cfrac{\pi^2}{3 - \cfrac{\pi}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \ddots}}}},$$

also

$$3 = \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \ddots}}$$

Wäre nun π^2 einer rationalen Zahl $\frac{m}{n}$ gleich, so wäre

$$3 = \cfrac{m}{5n - \cfrac{m}{7 - \cfrac{m}{9 - \ddots}}},$$

was nach dem bereits Gesagten unmöglich ist.

Damit war nun die Frage nach der Möglichkeit der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal um ein bedeutendes, wenn auch in negativer Richtung, gefördert worden. Obwohl eine ganze Anzahl irrationaler Zahlen, z. B. sämtliche Quadratwurzeln mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, so *grenzte* doch jetzt schon *die Wahrscheinlichkeit, daß die Quadratur des Kreises mit diesen Hilfsmitteln unmöglich* ist, *fast an Gewißheit.* Bei den meisten Mathematikern hatte sich schon lange die Überzeugung gebildet, daß π eine transzendente Zahl ist. Euler schreibt 1785: *„Die Ansicht scheint*

genügend befestigt zu sein, daß die Kreisperipherie[1]) *eine so eigentümliche Art transzendenter Größen darstellt, daß sie mit keinen anderen Größen, seien es Wurzelgrößen oder andere Transzendenten, irgendwie sich vergleichen läßt.*" Und Legendre gibt 1794 am Schluß einer sich mit diesem Gegenstand befassenden Abhandlung seiner Überzeugung mit den Worten Ausdruck: „*Es ist wahrscheinlich, daß die Zahl* π *nicht einmal unter den algebraischen Irrationalitäten enthalten ist, d. h. daß sie nicht Wurzel sein kann irgendeiner algebraischen Gleichung mit einer endlichen Anzahl von Gliedern, deren Koeffizienten rational sind.* Aber es scheint sehr schwer zu sein, diesen Satz strenge zu beweisen."

FÜNFTES KAPITEL

DIE ENDGÜLTIGE ERLEDIGUNG DES PROBLEMS

§ 16. Beweis der Transzendenz von π

In der Tat dauerte es fast noch ein Jahrhundert, bis der Beweis für die Transzendenz von π erbracht wurde. Im Jahre 1873 bewies *Hermite*, daß die Zahl e, die Basis der natürlichen Logarithmen, eine transzendente Zahl ist. Auf Grund des Hermiteschen Beweises, der sich auf gewisse Relationen zwischen bestimmten Integralen stützt, gelang *Lindemann* im Jahre 1882 der *Nachweis, daß* auch *die Zahl* π *eine transzendente Zahl ist.* Der Beweis wurde 1885 von *Weierstraß* und 1893 von *Hilbert* wesentlich vereinfacht. *Hurwitz, Gordan* und *Vahlen* haben den Beweis einer weiteren Vereinfachung unterzogen, so daß er jetzt nach Ausschaltung der Integralrechnung ganz elementar ist.

Den Schlüssel für die Lösung unserer Aufgabe bildet der von Euler entdeckte Zusammenhang der trigonometrischen Funktionen mit der Exponentialfunktion

$$(*) \qquad e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Da $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, so wird

$$e^{i\pi} = -1,$$

1) Im Kreis mit Radius $r = 1$ ist die Länge der Peripherie 2π.

woraus sich die Gleichung ergibt

(1) $$1 + e^{i\pi} = 0.$$

Wie man sieht, hängt der Beweis der Transzendenz von π enge zusammen mit dem für die Zahl *e*.

Der *Beweis* wird *indirekt* geführt. Man geht von der allgemeinen Form der Gleichung (1)

(2) $$a \cdot e^{\alpha} = c,$$

einer „zweigliedrigen Hermite-Lindemannschen Gleichung" aus, wo a, α und c ganze Zahlen sind und ersetzt e^{α} näherungsweise durch eine rationale Abschätzungsfunktion $\frac{\Psi(\alpha)}{\Phi(\alpha)}$, so daß die Entwicklung $e^{\alpha}\Phi(\alpha) = \Psi(\alpha) + R(a)$ mit einer möglichst hohen Potenz von α beginnt. Dann ist noch zu zeigen, daß 1. $e^{\alpha}\Phi(\alpha) - \Psi(\alpha)$ oder $c\Phi(\alpha) - a\Psi(\alpha)$ eine nicht verschwindende ganze Zahl wird und 2. der Rest $R(\alpha)$ absolut genommen beliebig klein, also auch < 1 gemacht werden kann. Unter diesen beiden Bedingungen erweist sich die Gleichung

$$e^{\alpha}\Phi(\alpha) - \Psi(\alpha) = R(\alpha)$$

als unmöglich, denn eine ganze Zahl kann nicht < 1 werden. Damit ist die Annahme, π sei eine algebraische Zahl, widerlegt.

Mit Rücksicht auf den verfügbaren Raum müssen wir es uns versagen, den Transzendenzbeweis vollständig anzuführen; wir begnügen uns mit dem Hinweis auf die Literaturangaben am Schluß des Bändchens.

Die Gleichung (2) ist nur ein besonderer Fall der allgemeinen Lindemannschen Gleichung

(3) $$a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} + \cdots + a_r e^{\alpha_r} = \sum_{r=1}^{r} a_r e^{\alpha_r} = 0$$

und für diese gilt der **Satz:**

Versteht man unter $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r$ irgendwelche voneinander verschiedene, unter $a_1, a_2, \cdots a_r$ aber beliebige algebraische Zahlen, so gilt die Gleichung (3) nur dann, wenn $a_1, a_2, \cdots a_r$ sämtlich den Wert Null haben.

Dieser zuerst von Lindemann aufgestellte Satz liefert auch für das Problem der Kreisquadratur eine Verallge-

meinerung. Setzt man nämlich in der Gleichung

$$a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} + a_3 e^{\alpha_3} = 0$$

$$a_1 = i,\ a_2 = -i,\ a_3 = a,\ \alpha_2 = -\alpha_1,\ \alpha_1 = \frac{ix}{2},\ \alpha_3 = 0,$$

so ergibt sich, daß die Gleichung

$$i\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}\right) + a = 0$$

oder, da $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$, daß

$$2 \sin \frac{x}{2} = a \tag{4}$$

nicht bestehen kann, wenn x und a beide algebraische Zahlen sind und x nicht gleich Null ist.

Im Kreis mit Halbmesser 1 und Bogen x hat die Sehne die Länge $2 \sin \frac{x}{2}$ und der zugehörige Kreissektor den Inhalt $\frac{x}{2}$. Die Gleichung (4) besagt also, daß *ein Kreisbogen, dessen Sehne eine algebraisch ausdrückbare Länge hat, nicht durch eine geometrische Konstruktion rektifiziert werden kann, bei der nur algebraische Kurven und Flächen zur Anwendung kommen; auch kann der zugehörige Kreissektor durch eine derartige Konstruktion nicht quadriert werden.*

Der Lindemannsche Satz, daß π eine transzendente Zahl ist, löst das Problem der Kreisquadratur in einer viel umfassenderen Weise als es die ursprüngliche Fragestellung verlangte. Wir können jetzt so weit gehen und sagen: *Die Quadratur des Kreises ist unmöglich, wenn als konstruktive Hilfsmittel nicht nur Zirkel und Lineal, sondern auch algegebraische Kurven und Flächen benützt werden dürfen.* Eine Konstruktion, in der diese allgemeinen Hilfsmittel zugelassen werden, führt zu einer Reihe algebraischer Gleichungen höheren Grades, durch welche die zu konstruierende Zahl sich als eine algebraische ergeben würde. Diese Möglichkeit ist aber, wie bereits gesagt, für die transzendente Zahl π ausgeschlossen.

Damit ist also ein Problem endgültig abgetan, das fast vier, vielleicht sogar acht Jahrtausende lang, also seit den

Anfängen menschlicher Kultur bis an die Schwelle der Gegenwart die führenden Geister der mathematischen Wissenschaft beschäftigte und in seinen Bannkreis zog. Es mag uns Menschen der Neuzeit eine gewisse Genugtuung bereiten, daß erst die Hilfsmittel der modernen Mathematik die endgültige Lösung des viel umstrittenen Problems ermöglicht haben, daß die hervorragendsten Mathematiker früherer Zeiten vergeblich ihren Scharfsinn für die Lösung der anscheinend so harmlosen Aufgabe aufwandten. Aber doch war diese Arbeit nicht vergeblich: nicht nur waren diese Vorarbeiten zur endgültigen Erledigung des Problems notwendig, sondern dadurch, daß dieses Problem immer wieder auftrat, und zwar in den verschiedenartigsten Gebieten der mathematischen Wissenschaft, hat es fördernd und befruchtend auf diese eingewirkt. Die älteren Bearbeiter der Aufgabe, einen Kreis in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln, hatten wohl schwerlich eine Ahnung davon, welche Schwierigkeiten diese anscheinend so harmlose Aufgabe in sich barg und welche Unsumme von geistiger Arbeitskraft bis zu ihrer völligen Lösung, die fast einer Erlösung gleichkam, aufgewendet werden mußte.

Hat also das alte schwierige Problem der Quadratur des Kreises eine vollkommen befriedigende und strenge Lösung gefunden, wenn auch in anderem als dem ursprünglich gemeinten Sinn, so mag diese Tatsache in uns die Überzeugung entstehen lassen, daß jedes mathematische Problem lösbar ist. Es klingt in uns der Zuruf: „Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es keine Grenzen des Wissens."

LITERATURVERZEICHNIS

Für das ganze Bändchen wurden benützt:

1. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 4 Bde.: Bd. I 3. Aufl. Leipzig 1907; Bd. II 2. Aufl. 1900; Bd. III 2. Aufl. 1901; Bd. IV 1908.
2. S. Günther, Geschichte der Mathematik. I. Teil. Leipzig 1908. (Sammlung Schubert.)
3. F. Rudio, Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Leipzig 1892.
4. H. Schubert, Die Quadratur des Kreises in berufenen und unberufenen Köpfen. In Virchow-Holtzendorffs Sammlung. III. Serie, Hamburg 1889.
5. M. Simon, Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Leipzig 1906. (Enthält sehr viele Literaturangaben; ebenso Nr. 6 und 7.)
6. J. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik. Bd. II. Leipzig 1903.
7. Th. Vahlen, Konstruktionen und Approximationen. Leipzig 1911.
8. H. Wieleitner, Geschichte der Mathematik. II. Teil. 1. Hälfte. Leipzig 1911. (Sammlung Schubert.)

Für das erste Kapitel:

9. F. Enriques, Fragen der Elementargeometrie. Deutsche Ausgabe von Fleischer. II. Teil. Leipzig 1907.

Für das zweite Kapitel:

10. K. Kommerell, Über die Lehre von den Proportionen und von dem Flächeninhalte. (Progr.) Stuttgart 1912.

Für das dritte Kapitel:

11. L. Euler, Introductio in analysin infinitorum (deutsche Ausgabe von Michelsen). Bd. 1, Berlin 1788.

Zum fünften Kapitel

geben wir dem Leser für weitergehende Studien noch folgende Bücher an:

12. G. Hessenberg, Transzendenz von e und π. Leipzig 1912. Enthält eine ausführliche, nicht elementare Darstellung der verschiedenen Transzendenzbeweise mit Darstellung des Zusammenhangs der einzelnen Beweisanordnungen.

Eine elementare Darstellung des vereinfachten Beweises mit Benützung des Hermiteschen Integrals findet sich in

13. F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. (Autogr.) I. Teil. 2. Aufl. (S. 519ff.) Leipzig 1911.

14. H. Weber und J. Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik, I. Band 3. Aufl. (§ 144), Leipzig 1909; hier wird das Hermitesche Integral durch eine leichter zugängliche rationale Funktion ersetzt.

NAMENVERZEICHNIS

mit kurzen biographischen Bemerkungen, soweit solche nicht bereits im Text stehen.

(Die beigesetzten Ziffern bezeichnen die Seitenzahlen.)

Abdank-Abakanowicz 19.

Abul Wafa, 940–998, aus der ostpersischen Provinz Chorassan, als „weitbekannter Rechner und glänzende Leuchte der Geometrie" jahrhundertelang gefeiert 23.

Adrian Metius, geb. 1527 in Metz, gest. 1607, Kriegsbaumeister in den Niederlanden 32. 55.

Adriaen van Romen, 1561 bis 1615, Professor an der Universität seiner Vaterstadt Löwen, gest. als Professor der Mathematik an der Universität Würzburg 31.

Ahmes 7.

Albert von Sachsen, geb. in der Nähe von Quedlinburg, gest. 1394 als Bischof von Halberstadt 24.

Anaxagoras, 500–428 v. Chr., hauptsächlich in Athen 9.

Anthonisz s. Adrian Metius.

Antiphon, um 430 v. Chr., Philosoph und Mathematiker, Zeitgenosse des Sokrates 10. 13. 37.

Apollonius von Pergä (in Kleinasien), lebte in Alexandrien 250 bis etwa 200 v. Chr., bis etwa 170 in Pergamum, schon von seinen Zeitgenossen durch den Beinamen des großen Mathematikers ausgezeichnet 11. 16.

Archimedes, 287–212, hervorragender Mathematiker und Physiker, lebte hauptsächlich in Syrakus, langjähriger Freund des Königs Hiero. Seiner von den Römern belagerten Vaterstadt leistete er zwei Jahre lang durch seine Verteidigungsmaßnahmen, die Wunderwerke der Ingenieurkunst waren, die trefflichsten Dienste, bis er im Jahre 212 bei der Eroberung der Stadt zum großen Schmerz des römischen Belagerers Marcellus den Tod fand 6. 10. 11. 16. 37. 55.

Arima 53.

Aryabhatta 20. 23.

Barrow, Isaac, 1630–1677, Theologe und Professor der Mathematik in Cambridge 39.

Basselin 1.

Baudhâyana 8.

Bernoulli. Aus der Basler Familie B. entstammen 5 teilweise hervorragende Mathematiker: *Jakob* (1654–1705)

studierte nach des Vaters Wunsch Theologie, daneben aus eigenem Antrieb Mathematik und Astronomie, Professor der Mathematik an der Universität Basel. Sein jüngerer Bruder *Johann* (1667 bis 1748), seit 1695 Professor der Physik in Groeningen (Holland), ist wohl das bedeutendste Glied der berühmten Mathematikerfamilie, nach dem Tod seines Bruders Jakob dessen Nachfolger in Basel. Der Neffe der beiden Brüder *Niclaus I.* (1687–1759, Basel) und die beiden Söhne Johanns, *Niclaus II.* (1695–1726) und *Daniel* (1700–1782) vervollständigen das Bild dieser durch mathematische Begabung und wissenschaftliche Leistungen hervorragenden Familie 38.

Bhaskara 20. 23.

Bismarck 4.

de Bouvelles 28.

Brahmagupta 20. 23.

Brouncker, Lord William, 1620–1684, erster Präsident der Royal Society in London, um deren Gründung er sich große Verdienste erwarb 39. 63.

Bryson 10. 13. 37.

Buzengeiger, K., 1771–1835, zuerst Magister in Ansbach, dann Professor der Mathematik in Freiburg im Breisgau 48. 49.

Cantor, Moritz, geb. 1829, Verfasser der „Geschichte der Mathematik", Professor an der Universität Heidelberg 69.

Cavalieri, 1591–1647, Schüler des Astronomen Galilei 38.

Collins, J., 1625–1683, zuerst Buchhändler, später Mitglied der Royal Society, bekannt durch seinen ausgedehnten gelehrten Briefwechsel und durch die eifrige Förderung, die er der Veröffentlichung alter und neuer Werke angedeihen ließ 39. 42.

Condorcet, 1743–1794 3.

Coradi 19.

Corsonich 1.

Cusanus, s. Nicolaus von Cusa.

Dahse, Zacharias 50.

Descartes, René, latinisiert Cartesius, geb. 1596, bekannt als Erfinder der analytischen Geometrie, gest. 1650 in Stockholm, wohin er nach einem bewegten Leben auf den Ruf der Königin Christina von Schweden zog 33.

Dinostratus 17.

Duchesne 28.

Dürer, Albrecht, 1471–528, Künstler und Architekt, Nürnberg 55.

Eratosthenes 11.

Euklid, um 300 v. Chr., in Alexandrien. Sein Hauptwerk sind die „Elemente", deren Inhalt noch heute zum eisernen Bestand der Elementargeometrie gehört, wie sie an unseren Schulen gelehrt wird 11.

Euler, Leonhard, geb. 1707 in Basel, Schüler von Jakob Bernoulli. Seine Studiengenossen Niclaus und Daniel Bernoulli wurden 1725 an die neu gegründete Petersburger Akademie berufen und auf deren Betreiben folgte Euler 1727 ebenfalls dorthin. 1741 nahm

er einen Ruf Friedrichs des Großen an die Berliner Akademie der Wissenschaften an, wo er zum Direktor der Mathematischen Klasse bestellt wurde. 1766 siedelte er wieder nach Petersburg über, hatte aber das Unglück, kurz nach seiner Ankunft zu erblinden. Ein unübertreffliches Gedächtnis ermöglichte es ihm im Verein mit der Hilfe aufopfernder Schüler, seine wissenschaftlichen Arbeiten bis zu seinem im Jahr 1783 erfolgten Tode fortzusetzen. Auf allen Gebieten der reinen und angewandten Mathematik hat Eulers Tätigkeit bahnbrechend gewirkt; seine wissenschaftliche Bedeutung wird am besten dadurch gekennzeichnet, daß seine Arbeiten (seit 1911) neu herausgegeben werden; sie werden 45 Bände umfassen 31. 38. 44. 46. 47. 52. 54. 64.

Eutocius von Askalon 16.

van der Eycke s. Duchesne.

Fermat, 1601–1663, Parlamentsrat (Jurist) in Toulouse, bedeutender Mathematiker. Er hat zuerst den nach ihm benannten Satz ausgesprochen, daß die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ bei ganzzahligen Werten von x, y und z für $n > 2$ nicht erfüllbar ist. Der angeblich von Fermat aufgefundene Beweis ist bis heute noch nicht geliefert 38.

Fontana 57.

Franco von Lüttich 24.

de Gelder 32.

Gordan, P., geb. 1837, Professor an der Universität Erlangen 65.

Gregorius von St. Vincentius, geb. 1584 in Brügge, 1629 bis 1631 Professor der Mathematik in Prag, gest. 1667 in Gent 35. 38.

Gregory, Edinburg 41. 42. 43.

Grienberger 35.

Halley, E., 1656–1742, englischer Astronom 44.

Hermite, Charles, 1882–1901, Professor an der Universität Paris 65.

Heron, wahrscheinlich um 110 v. Chr. in Alexandrien, bedeutender Geodät und Mechaniker 12.

Hilbert, D., geb. 1862, Professor an der Universität Göttingen 65.

Hipparch, etwa 180–125 v. Chr., bedeutender Astronom auf Rhodus und in Alexandrien 16.

Hippias 17.

Hippokrates 11.

Hurwitz, A., geb. 1859, Professor an der Universität Königsberg 65.

Huygens, Ch., 1629–1695, lebte im Haag und in Paris, hervorragender Mathematiker, Physiker und Astronom 6. 29. 34–37.

Ibn Alhaitam, geb. 950 in Basra, nach Ägypten berufen zur Anlage von Wasserbauten (Staudämmen), gestorben 1038 23.

Jones, William 54.

Kepler, J., 1571–1630, berühmter Astronom und Entdecker der nach ihm benannten drei Gesetze über die Planetenbewegung 38.

Kochansky 58.
Kommerell 36.
Kwoa Seki 53.
Kurushima 53.
de Lagny, Th. F. 43. 44.
Lambert, 1728–1777, Oberbaurat in Berlin 42. 63.
Legendre, Adrien Marie, 1752 bis 1833, Professor an der École normale in Paris. 64. 65.
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 1646 bis 1716, geb. in Leipzig, Philosoph, Staatsmann in hannoverschen und preußischen Diensten, hervorragender Mathematiker, erster Präsident der Berliner Akademie der Wissenschaften 38. 43.
Leonardo da Vinci, 1452–1519, Maler, Ingenieur, Architekt, Physiker, Astronom und Mathematiker, hauptsächlich in Florenz 27.
Leonardo von Pisa, um 1220, als junger Mann im heutigen Tunis mit dem Studium arabischer Mathematik beschäftigt, erweiterte seine mathematischen Kenntnisse auf großen Reisen in den Mittelmeerländern, machte arabische Wissenschaft dem Abendland zugänglich 24.
Lindemann, F., geb. 1852, Prof. der Mathematik an der Unisität München 6. 65.
Liu Hui 8.
Ludolf van Ceulen, 1539–1610, Professor der Mathematik und der Kriegsbaukunst in Leyden (Holland). Der Beiname van Ceulen deutet auf Kölner Abstammung 28. 31.
Longomontanus, 1562–1647, Gehilfe von Tycho de Brahe und Professor der Mathematik an der Universität Kopenhagen 33.
Machin, 1680–1751, Professor der Astronomie in London 47.
Mascheroni, L., 1750–1800, Professor der Elementarmathematik an der Universität Pavia, Mitglied der Kommission zur Ordnung des metrischen Maß- und Gewichtssystems 59.
Mathulon 1.
Mitsuyoshi Yoshida 53.
Mohammed ibn Musa mit dem Beinamen *Alchwarizmi* (d. h. der Chowaresmier, aus Chorassan stammend), lebte im ersten Viertel des 9. Jahrhunderts. Er ist der Schöpfer der arabischen Algebra. Das erste Wort in dem Titel seines mathematischen Lehrbuchs, Aldschebr walmukabala, d. h. Einrichtung – Gegenüberstellung ist in der latinisierten Form Algebra die Bezeichnung für einen Zweig der mathematischen Wissenschaft geworden. 23.
Newton, Isaac, 1643–1727, hervorragender Mathematiker und Physiker, von 1669–1696 Professor der Mathematik in Cambridge, dann Direktor der Kgl. Münze, 1703 Präsident der Royal Society, 1705 von der Königin Anna in den Adelsstand erhoben 38. 39. 42–44.
Nicolaus von Cusa, Deutscher Kardinal, 1401–1461, eigent. Nikolaus Chrypffs = Krebs aus Cues an der Mosel, seit 1448 in Rom 25. 38.

Orontius Finaeus (OronceFinée), 1494–1555, der erste Mathematikprofessor an der Universität Paris (seit 1532) 28.
Oughtred, William, 1574–1660, als einfacher Landpfarrer auf den verschiedensten Gebieten der Mathematik tätig 54.
Pappus, 3. Jahrh. n. Chr., Alexandrien 17.
Pell, John, 1610–1685, London 33.
Peurbach, 1423–1461, Astronom und Professor an der Universität Wien, Lehrer von Regiomontan (s. unten) 25.
Pioche 59.
Ptolemäus, Klaudius, zwischen 151 und 125 v. Chr., Vorstand der berühmten Sternwarte in Alexandrien; Schöpfer des nach ihm benannten Weltsystems. Sein Hauptwerk, die 13 Bücher der „großen Zusammenstellung" (μεγάλη σύνταξις), enthält astronomische und trigonometrische Arbeiten; es wurde später ins Arabische übersetzt und erhielt den Namen Almagest 17. 55.
Regiomontan (Johannes Müller aus Königsberg i. Fr.), 1436 bis 1476, Mathematiker, Astronom und Geograph, schuf durch Verschmelzung arabischer Forschungsergebnisse mit eigenen Erfindungen den Grundstock der heutigen Schultrigonometrie.
Rhind 7.
Richter 50.
Roberval (Giles Personnier), 1602–1675, nahm nach seinem Geburtsort im nordwestlichen Frankreich den Namen Persone de R. an, Professor der Mathematik am Collège Royal in Paris 33.
Rudio, F., geb. 1856, Prof. der Mathematik am eidgenössischen Polytechnikum in Zürich 30.
Rutherford, W. 50.
Shanks 50.
Scharp, Abraham 44.
Simon, M., geb. 1844, Straßburg 58.
Snellius, 1580–1626, Professor der Mathematik und Physik an der holländischen Universität Leyden 29. 33. 34. 38.
Specht 60.
Sun-li Ching-yun 32.
Tacquet, 1612–1660, Jesuit 38.
Tseng-Chi-hung 53.
Tsu Chung-chih 32.
Vahlen, Th., geb. 1869, Prof. an der Universität Heidelberg 36. 65.
Valentius Otho, 1550–1605, Professor in Wittenberg 32.
Vega, Georg, Freiherr v., 1756 bis 1802, Professor der Mathematik in Wien 49.
Vieta, 1540–1603, Rechtsanwalt in Poitou, später unter Heinrich IV. Parlamentsrat in Tours und Mitglied des königlichen geheimen Rats in Paris, hervorragender Mathematiker und Erfinder der Buchstabenrechnung 29. 31. 38. 39.
Vitruvius 20. 55.
Wallis, John, 1616–1703, Professor der Mathematik in Oxford 38. 39. 52.
Weierstraß, Karl, 1815–1897, Professor der Mathematik an der Universität Berlin 65.
Wolf, Rudolf, Zürich 51.
Yoshihide Masunaga 53.

MAR 8 - 19

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels

von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage.

Mit vier Abhandlungen (in deutscher Übersetzung) über die Kreismessung von Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre.

Von Dr. **F. Rudio**

Professor am Polytechnikum zu Zürich

Mit Figuren im Text. gr. 8. Geh. *M.* 4.—, in Leinw. geb. *M.* 4.80

Nachdem das Problem der Quadratur des Kreises in dem Nachweis der Transzendenz der Zahl π seine Erledigung gefunden hat, erschien es dem Verf. nicht ungerechtfertigt, mit vorliegender Schrift die Aufmerksamkeit auch auf diejenigen älteren Arbeiten, denen das Problem von der Quadratur des Zirkels eine direkte, weithin wahrnehmbare Förderung verdankt, zu lenken, und diese Arbeiten in sorgfältiger Übersetzung allgemein zugänglich zu machen. Es sind dies die Abhandlungen: *κύκλου μέτρησις*, von Archimedes; De circuli magnitudine inventa, von Huygens; Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen, von Lambert und Note, où l'on démontre que le rapport de la circonférence au diamètre et son quarré sont des nombres irrationnels, von Legendre. In der Einleitung ist dem Buche eine historische Übersicht über die Entwickelung des Problems von der Quadratur des Zirkels, von den ältesten Zeiten bis auf die Gegenwart vorausgeschickt.

Dr. W. Ahrens:

Mathematische Unterhaltungen und Spiele

2., vermehrte und verbesserte Auflage. In 2 Bänden. I. Band. Mit 200 Figuren. 8. In Leinw. geb. *M.* 7.50. II. Band in Vorb.

Kleine Ausgabe: **Mathematische Spiele.** 170. Bändchen der Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen „Aus Natur und Geisteswelt." Mit einem Titelbild und 69 Figuren im Text. 8. Geh. *M* 1.—, in Leinw. geb. *M* 1.25

„...Dem wissenschaftlichen Interesse wird Verfasser gerecht, indem er durch die sorgfältig zusammengetragene Literatur und durch Einschaltungen mathematischen Inhalts die Beziehungen zur Wissenschaft herstellt: dem Nichtmathematiker kommt er durch die trefflichen Erläuterungen entgegen, die er der Lösung der verschiedenen Spiele zuteil werden läßt, und die er, wo nur irgend nötig, durch Schemata, Figuren und dergleichen unterstützt."

(Prof. Czuber in der Zeitschrift für das Realschulwesen.)

Scherz und Ernst in der Mathematik

Geflügelte und ungeflügelte Worte

gr. 8. 1904. In Leinwand geb. *M.* 8.—

„Ein ‚Büchmann' für das Spezialgebiet der mathematischen Literatur.... Manch ein kurzes treffendes Wort verbreitet Licht über das Streben der in der mathematischen Wissenschaft führenden Geister. Hierdurch aber wird das sorgfältig gearbeitete Ahrensche Werk eine zuverlässige Quelle nicht allein der Unterhaltung, sondern auch der Belehrung über Wesen, Zweck, Aufgabe und Geschichte der Mathematik". (J. Norrenberg in der Monatsschrift für höhere Schulen.)